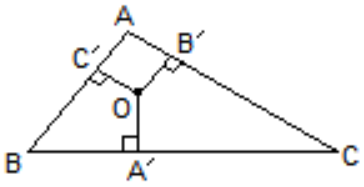
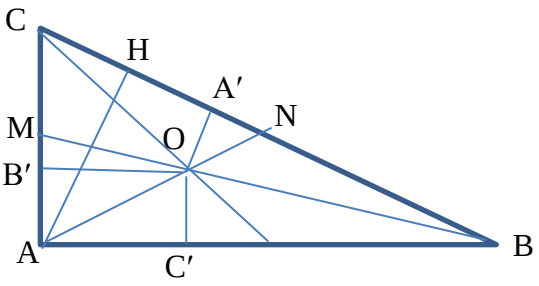
توجه: فقط به چهار سؤال از هشت سؤال زیر پاسخ دهید. ۱-هر گروه باید تا ساعت ۱۸ روز سه شنبه ۳ اردیبهشت یک پاسخنامه به صورت فایل پی دی اف آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. ۲-پاسخ ها باید همراه با دلیل کامل نوشته شوند.در جلسه داوری از دلایل درستی نوشته های شما مانند فرمول های استفاده شده سوال می شود. ۳-تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. ۴- دانش آموزان عزیز در زمان امتحان شفاهی که زمان آن به شما اعلام می شود جهت پاسخگویی به سوالات داوران نسخه ای از پاسخنامه تحویل داده شده را همراه داشته باشید.. داوران از همه اعضای گروه سوال می کنند.	مشخصات اعضای تیم ۱- ۲- ۳- نام خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	مساله رمزگشایی زیر چند جواب دارد(هر حرف نمایش یک رقم است و دو حرف متفاوت دو رقم متفاوت هستند) $\overline{ABCDE} \times A = \overline{EEEEEE}$ پاسخ : چون $111111 = 1001 \times 111 = 7 \times 11 \times 13 \times 3 \times 37$ پس A باید برابر ۳ یا ۷ باشد. و چون $E \times A$ باید عددی باشد که رقم یکان آن E است پس باید E=5. بنابراین Aنمی تواند ۳ باشد زیرا $\overline{3BCD5} \times 3$ حداکثر برابر ۱۱۹۶۲۵ می باشد(39875×3) پس $A = 7 , E = 5$ حال با یک محاسبه ساده می بینیم که بقیه ارقام به صورت یکتا به دست می آیند و تنها جواب سوال عبارت است از $79365 \times 7 = 555555$	۳
۲	عددی سه رقمی بیابید که مربع آن برابر توان پنجم مجموع ارقامش باشد پاسخ : فرض کنیم $(\overline{xyz})^2 = (x+y+z)^5$. حاصل دو طرف این عبارت باید توان دهم کامل باشد بنابراین عدد سه رقمی مطلوب باید به صورت توان پنجم یک عدد باشد ولی فقط عدد سه رقمی $3^5 = 243$ به این شکل است در شرایط مساله نیز صدق می کند.	۳
۳	دامنه تابع زیر را به دست آورید . $f(x) = \sqrt{log_{\frac{x}{2}}(x^2+x)}$ پاسخ : باید داشته باشیم $\frac{x}{2} \neq 1$ و $\frac{x}{2} > 0$ و $log_{\frac{x}{2}}(x^2+x) \geq 0$ و $x^2+x > 0$	۴

	دو حالت در نظر می گیریم حالت اول) فرض کنیم $0 < \frac{x}{2} < 1$ یا $0 < x < 2$ در این حالت داریم $x^2 + x > 0$ و $x^2 + x \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x < -1$ یا $0 < x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ که با فرض $0 < x < 2$ جواب این حالت می شود $0 < x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ حالت دوم) $\frac{x}{2} > 1$ یا $x > 2$ در این حالت داریم $x^2 + x > 0$ و $x^2 + x \geq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ یا $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ که با فرض $x > 2$ جواب این حالت می شود $x > 2$ بنابراین $D_f = (0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}] \cup (2, +\infty)$	
۵	حاصل عبارت $\frac{۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+\cdots+۱۴۰۳\times۱۴۰۴\times۱۴۰۵}{۱۴۰۳\times۱۴۰۴\times۱۴۰۵}$ را به دست آورید؟ پاسخ : $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$ $= \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\frac{1}{4}[(i+3)-(i-1)]$ $= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}[i(i+1)(i+2)(i+3)-(i-1)i(i+1)(i+2)]$ پس اگر فرض کنیم $f(i) = (i-1)i(i+1)(i+2)$ داریم $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}[f(i+1)-f(i)] = f(n+1)-f(1)$ در نتیجه داریم $\frac{۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+\cdots+۱۴۰۳\times۱۴۰۴\times۱۴۰۵}{۱۴۰۳\times۱۴۰۴\times۱۴۰۵} = \frac{1}{4}\times\frac{f(1404)-f(1)}{1403\times1404\times1405}$ $= \frac{1403\times1404\times1405\times1406}{4\times1403\times1404\times1405} = \frac{1406}{4} = \frac{703}{2}$	۴

۵	در مثلث قائم الزاویه ABC(A=90) به اضلاع زاویه قائمه ۱۸ و ۲۴ از O محل برخورد میانه های مثلث سه عمود بر اضلاع وارد کرده ایم ، طول قطعات ایجاد شده روی اضلاع مثلث را بیابید.  پاسخ : از آنجا که میانه های هرمثلث همرسند و در نقطه همرسی به نسبت ۱و۲ یکدیگر را قطع می کنند. حال چون OC' با AC موازی است طبق قضیه تالس داریم : $\frac{OB}{OM}=\frac{BC'}{C'A}=\frac{2}{1}\Rightarrow BC'=16\,,AC'=8$  به طریق مشابه داریم: $CB'=12\,,AB'=6$ از رابطه فیثاغورس به دست می آوریم $BC=30$ و برای یافتن قطعات روی وتر دو روش داریم: روش اول : اگر AH ارتفاع نظیر وتر باشد داریم : $AC.AB=BC.AH=2S\Rightarrow AH=\frac{18\times24}{30}=14/4$ همچنین از تشابه دو مثلث AHN و OA'N داریم : $\frac{OA'}{AH}=\frac{ON}{AN}=\frac{1}{3}\Rightarrow OA'=4/8$ سپس از رابطه فیثاغورس طول میانه BM را برابر $3\sqrt{73}$ به دست می آوریم بنابراین داریم $OB=2\sqrt{73}$ و بالاخره به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث $OA'B$ به دست می آوریم $BA'=16/4$ و لذا $CA'=13/6$ روش دوم : به کمک تشابه مثلث ها داریم $HA'=2A'N$ همچنین از روابط طولی مثلث قائم الزاویه داریم $AC^2=CH.BC\Rightarrow CH=\frac{324}{30}=10/8$ پس $3A'N+10.8=15\Rightarrow A'N=1/4$ حال به سادگی CA' و $A'B$ به دست می آیند.	۶
۶	ثابت کنید برای هر $n\in N$ و x داریم $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leq(\sin x)^{2n}+(\cos x)^{2n}\leq1$ پاسخ: اثبات طرف چپ نامساوی : ابتدا ثابت می کنیم اگر $x+y\geq0$ برای هرعدد طبیعی n داریم $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1}\leq x^n+y^n$ و برای اثبات این نامساوی از روش استقرای ریاضی استفاده می کنیم. فرض کنیم حکم برای n=k درست باشد. برای n=k+1 ثابت می کنیم.	۶

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k-1} \le x^k + y^k \Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{x+y}{2}\right) \le (x^k+y^k)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k} \le (x^k+y^k)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم

$$(x^k+y^k)\left(\frac{x+y}{2}\right) \le x^{k+1}+y^{k+1}$$

که معادل است با اینکه $(x-y)(y^k-x^k) \le 0$ که درستی آن واضح است. حال اگر در این نامساوی قرار دهیم $x = sin^2x\,, y = cos^2y$ سمت چپ نامساوی اثبات می شود.

روش دوم: فرض کنیم $a = sin^2x\,, b = cos^2y$ باید ثابت کنیم $a^n + b^n \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-1}$

چون $a+b=1$ می توان فرض کرد برای هر x یک $t \ge 0$ وجود دارد که $a = \frac{1}{2} - t\,, b = \frac{1}{2} + t$

در این صورت داریم :

$$a^n + b^n = \left(\frac{1}{2}+t\right)^n + \left(\frac{1}{2}-t\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} t + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} t^2 + \cdots + t^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$- \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} t + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} t^2 - \cdots + (-t)^n$$

با حذف جملات قرینه طرف راست برابر $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و تعدادی جمله مثبت است. پس

$$a^n + b^n \ge 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

برای اثبات نامساوی سمت راست هم داریم

$$(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n} \le (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

۶

۷ مجموعه $A = \{9 \text{و} \ldots \text{و} 3 \text{و} 12\}$ داده شده است .

الف) آیا می توان این مجموعه را به دو زیرمجموعه افراز کرد(یعنی به صورت اجتماع دو زیر مجموعه غیر تهی بنویسیم که اشتراک آنها تهی باشد) به طوری که هرکدام از آنها دارای این ویزگی باشند که اگر شامل دو عضو نه لزوما غیرمساوی مانند x,y باشند x+y در آن مجموعه نباشد

ب) نشان دهید نمی توان مجموعه A را به دو زیر مجموعه افراز کرد که هرکدام از آنها دارای دارای این ویژگی باشد که اگر شامل دو عضو غیرمساوی مانند x,y باشند نصف x+y در آن مجموعه نباشد

پاسخ :

الف) خیر نمی توان. فرض کنید عدد ۲ در مجموعه اول باشد در این صورت ۱و۴ نمی توانند در این مجموعه باشند و بنابراین باید در مجموعه دوم باشند. بنابراین عدد ۳ باید در مجموعه اول باشد. حال عدد ۵ نه می تواند در مجموعه اول باشد و نه در مجموعه دوم.

	ب) فرض کنیم $B \cap C = \emptyset$, $A = B \cup C$. حال فرض کنیم $5 \in B$ دراین صورت ۳ نمی تواند عضو B باشد چون اگر $3 \in B$ آنگاه ۱ و ۴ باید در C باشند(؟) و در این صورت ۷ نمی تواند در هیچکدام از این دو مجموعه باشد. با استدلالی مشابه می توان نشان داد که ۷ هم نمی تواند در B باشد. در نتیجه ۳ و ۷ هر دو در C هسند .همچنین دو عدد ۴ و ۶ نمی توانند با هم در B باشند پس حداقل یکی از آنها باید در C باشد. نشان می دهیم هیچکدام نمی توانند در C باشند. فرض کنیم ۴ در C باشد در این صورت داریم $\frac{2+4}{2} = 3 \Rightarrow 2 \in B$, $\frac{2+8}{2} = 5 \Rightarrow 8 \in C$, $\frac{7+1}{2} = 4 \Rightarrow 1 \in B$ تا اینجا ۵و۲و۶و۱ در B و ۳و۷و۴و۸ در C هستند ولی اکنون ۹ در هیچکدام نمی تواند باشد. به طریق مشابه ثابت می شود ۶ هم نمی تواند در C باشد.	
۸	به هر زیر مجموعه غیرتهی B از مجموعه $A = \{1,2,3, \dots, n\}$ حاصل ضرب اعضای B را به آن نظیر می کنیم. الف) حاصلضرب همه این حاصل ضرب ها چقدر است؟ ب) حاصل جمع همه این حاصل ضرب ها چقدر است؟ پ) با فرض $n \geq 510510$ به چند زیر مجموعه از A عدد 510510 نظیر می شود؟ پاسخ : الف) به سادگی دیده می شود اگر عدد نظیر هر زیر مجموعه A مانند B را در عدد نظیر زیرمجموعه $A - B$ ضرب کنیم عدد $n!$ به دست می آید. بنابراین می توان همه 2^n زیرمجموعه A را به 2^{n-1} جفت زیرمجموعه تقسیم کرد که حاصلضرب اعداد نظیر هر جفت $n!$ است پس پاسخ قسمت الف می شود $(n!)^{2^{n-1}}$ به روش دیگر می توان گفت هر عضو A در 2^{n-1} زیرمجموعه وجود دارد پس 2^{n-1} بار در حاصل ضرب مفروض وجود دارد پس حاصلضرب مفروض برابر است با $1^{2^{n-1}} \times 2^{2^{n-1}} \times 3^{2^{n-1}} \times \dots \times n^{2^{n-1}} = (n!)^{2^{n-1}}$ ب) اگر حاصل عبارت زیر را به دست آوریم $(1+1)(1+2)(1+3) \dots (1+n)$ مجموعی از 2^n حاصل ضرب به دست می آید که در واقع هر کدام عدد نظیر یکی از زیرمجموعه های A است. به جز جمله $1 \times 1 \times \dots \times 1$ که نظیر زیرمجموعه تهی است پس پاسخ قسمت ب می شود $2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+1) - 1 = (n+1)! - 1$ پ) ابتدا توجه می کنیم که $510510 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ حال هر زیر مجموعه از A که حاصل ضرب عضوهایش برابر ۵۱۰۵۱۰ است را می توان متناظر با یک افراز مجموعه $B = \{2,3,5,7,11,13,17\}$ دانست. به عنوان مثال مجموعه سه عضوی $\{2 \times 3 \times 5 \times 7, 11 \times 17, 13\} = \{210,187,13\}$ را می توان با افراز مجموعه B به سه زیر مجموعه $\{2,3,5,7\}, \{11,17\}, \{13\}$ نظیر کرد. بنابراین باید تعداد افرازهای مجموعه B را حساب	۷

کنیم.B را می توان به ۱یا۲یا...یا۷ زیرمجموعه افراز کرد که باید هرکدم را جداگانه حساب کنیم. مثلا برای محاسبه تعداد افرازهای B به ۳ زیرمجموعه می توان به شکل زیر عمل کرد.

روش اول :

تعداد افرازهای B به به سه زیرمجموعه ۵ و۱و۱ عضوی برابر است با $\binom{7}{5} = 21$

تعداد افرازهای B به به سه زیرمجموعه ۴ و۲ و۱ عضوی برابر است با $\binom{7}{4}\binom{3}{2} = 105$

تعداد افرازهای B به به سه زیرمجموعه ۳ و۳و۱ عضوی برابر است با $\frac{\binom{7}{3}\binom{4}{3}}{2} = 70$

تعداد افرازهای B به به سه زیرمجموعه ۳ و۲و۲ عضوی برابر است با $\frac{\binom{7}{3}\binom{4}{2}}{2} = 105$

در نتیجه تعداد افرازهای B به سه زیرمجموعه برابر است با $21 + 105 + 70 + 105 = 301$

روش دوم :

طبق فرمول استرلینگ نوع دوم تعداد افراز های یک مجموعه r عضوی به n زیرمجموعه برابر است با

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r$$

که برای r=7 و n=3 می شود $\frac{1}{6}(3^7 - 3\times 2^7 + 3) = \frac{2187-384+3}{6} = 301$

با محاسبه بقیه افرازها از روش اول برای تعداد کل افرازها داریم

$$\underbrace{1}_{1} + \underbrace{\binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4}}_{2} + \underbrace{301}_{3} + \underbrace{\binom{7}{4} + \binom{7}{3}\binom{4}{2} + \frac{\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{6}}_{4}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\binom{7}{2}\times\binom{5}{2} + \binom{7}{3}}_{5} + \underbrace{\binom{7}{2}}_{6} + \underbrace{1}_{7} = 877$$

ما می توانیم به هر کدام از زیرمجموعه های به دست آمده عدد۱ را هم اضافه کنیم و زیر مجموعه جدیدی با ویژگی خواسته شده به دست آوریم پس جواب سوال می شود $877 \times 2 = 1754$

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید