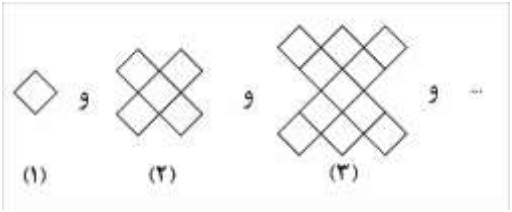
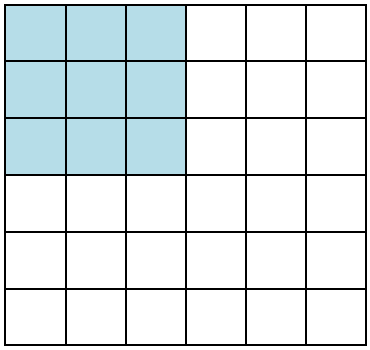
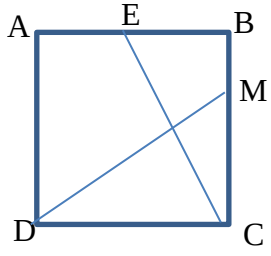
ردیف	سؤالات و پاسخ ها	امتیاز
۱	به الگوی زیر دقت کنید  شکل اول از ۴ پاره‌خط کوچک، شکل دوم از ۱۶ پاره‌خط کوچک و شکل سوم از ۳۲ پاره‌خط کوچک تشکیل شده است شکل n ام از چند پاره‌خط کوچک تشکیل شده است؟ پاسخ : تعداد پاره‌خط های شکل ۱ برابر $a_1 = 4$ و تعداد پاره‌خطهای شکل ۲ برابر $a_2 = 4 + 4 \times 3 =$ $a_1 + 4 \times 3$ و تعداد پاره‌خطهای شکل ۳ برابر $a_3 = a_2 + 4 \times 3 + 2 \times 2$ است تعداد پاره‌خطهای شکل ۴ برابر $a_4 = a_3 + 4 \times 3 + 4 \times 2$ و به طور مشابه $a_5 = a_4 + 4 \times 3 + 6 \times 2$ و با ادمه این روند به ازای هر $n \geq 3$ ، داریم بنابر این a_n برابر است با: $4 + 4(3) + \big(4(3) + 2(2)\big) + \big(4(3) + 2(4)\big) + \big(4(3) + 2(6)\big)$ $+\big(4(3) + 2(8)\big) + \cdots + \big(4(3) + 2(2n-4)\big) =$ $4 + 4(3)(n-1) + 2\big(2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-4)\big) =$ $4 + 12(n-1) + 2 \times 2(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2)$ $4 + 12(n-1) + 4 \times \frac{(n-2)(n-1)}{2} =$ $4 + 12(n-1) + 2(n-2)(n-1) =$ $4 + 12n - 12 + 2n^2 - 6n + 4 = 2n^2 + 6n - 4$	۴
۲	تمام اعداد بین ۳۰۰ و ۴۰۰ را بیابید که برابر با مجموع مکعبات ارقام خود باشند پاسخ : فرض کنیم عدد مطلوب $\overline{3xy}$ باشد در این صورت داریم : $\overline{3xy} = 27 + x^3 + y^3 \Rightarrow 300 + 10x + y = 27 + x^3 + y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 - 10x - y = 273$ با توجه به اینکه x و y رقم هستند حداقل یک از مقادیر x و y باید حداقل ۶ باشد و هر دو باید کمتر از ۸ باشند. با امتحان x=6 و x=7 و y=6 و y=7 فقط حالت x=7 جواب دارد. $343 + y^3 - 70 - y = 273 \Rightarrow y^3 - y = 0 \Rightarrow y = 1, y = 0$ پس مساله دارای دو جواب ۳۷۱ و ۳۷۰ می باشد.	۴

۳	هفت سکه یک تومانی روی میز قرار دارد که همگی طرف شیرشان رو به بالاست. در هر حرکت مجازیم که پنج سکه را همزمان برگردانیم. آیا می توانیم با انجام چند حرکت، سکه ها را به نحوی برگردانیم که طرف دیگر (خط) همه آنها رو به بالا قرار گیرد؟ اگر با هر حرکت فقط چهار سکه را برگردانیم، چطور؟ پاسخ : پاسخ قسمت اول سوال مثبت است و یک روش آن به صورت زیر است خ-خ-خ-خ-خ-ش-ش ⇨ ش-ش-ش-ش-ش-ش-ش خ-خ-خ-خ-خ-خ-خ⇨ خ-ش-ش-ش-ش-خ-ش جواب قسمت دوم سوال منفی است زیرا در ابتدا ۷ شیر داریم. و با انتخاب هر ۴ تایی و برگرداندن آنها تعداد شیرها تعداد زوجی کم یا زیاد می شود و بنابراین تعداد سکه های شیر همیشه فرد است و نمی توتند صفر شود. مثلا فرض کنی در مرحله ای x سکه شیر به طرف بالا است و ما یک سکه شیر و سه سکه خط را انتخاب و وارونه کنیم. در این صورت تعداد سکه های شیر می شود x-1+3=x+2	۴
۴	یک مدرسه برای ۳ بخش آموزشی، اداری و آزمایشگاه خود، بسته‌ای اینترنت جداگانه خریداری کرده است قیمت هر گیگابایت اینترنت خریداری شده توسط ۳ بخش که با شرکت‌های مختلف صورت گرفته ممکن است متفاوت باشد در یک ماه بخش آموزش ۲۰ گیگابایت، بخش اداری ۱۵ گیگابایت وبخش آزمایشگاه ۱۰ گیگابایت مصرف کرده‌اند و هزینه کل ۱۳۰۰۰۰۰ تومان شد در ماه بعد مصرف بخش آموزش ۱۰ گیگابایت، بخش اداری ۲۵ گیگابایت وبخش آزمایشگاه ۱۰ گیگابایت بود وباز هم هزینه کل ۱۳۰۰۰۰۰ تومان شددر ماه سوم، بخش آموزش ۲۰ گیگابایت، بخش اداری ۱۵ گیگابایت وبخش آزمایشگاه ۲۵ گیگابایت مصرف کرده‌اند و هزینه کل ۱۶۷۵۰۰۰ تومان شد. قیمت هر گیگابایت اینترنت در هر بخش چقدر است؟ پاسخ: از اطلاعات ماه اول و ماه دوم نتیجه می‌شود که قیمت اینترنت بخش آموزش و اداری برابر است حال اگر قیمت هرگیگابایت اینترنت آموزشی و اداری a تومان و قیمت گیگابایت اینترنت آزمایشگاهی b تومان باشد از اطلاعات ماه اول داریم $35a + 10b = 1300000$ یا $7a + 2b = 260000$ (۱) از اطلاعات ماه سوم داریم $35a + 25b = 1675000$ یا $7a + 5b = 335000$ (۲) از تفاضل رابطه (۱) از رابطه (۲) داریم $3b = 75000 \rightarrow b = 25000$ و با جایگذاری در معادله (۱) یا (۲) داریم $a = 30000$	۴

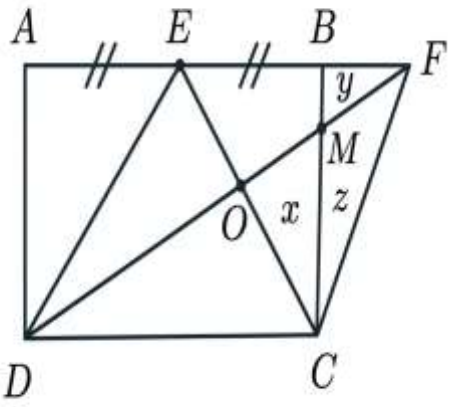
۵	الف) نشان دهید بی نهایت عدد طبیعی مانند n داریم به‌طوری‌که حاصل $1+2+3+\cdots+n$ مربع کامل باشد. ب)همه اعداد طبیعی مانند n را بیابید به‌طوری‌که حاصل $1!+2!+3!+\cdots+n!$ مربع کامل باشد. (برای عدد طبیعی n عملیات فاکتوریل را به صورت $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$ تعریف می‌کنیم.) پاسخ: الف) روش اول: می‌دانیم مجموع اعداد ۱ تا n برابر مقدار زیر است: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ حال می‌خواهیم این مقدار مربع کامل باشد، بنابراین $n(n+1)/2$ را برابر k^2 قرار می‌دهیم. بنابراین $n(n+1)=2k^2$. ساده‌ترین راه برای پیدا کردن این اعداد، امتحان کردن و پیدا کردن الگو است.: برای $n=1$ مجموع می‌شود ۱ که 1^2 است. برای $n=8$ مجموع می‌شود ۳۶ که 6^2است. برای $n=49$ مجموع می‌شود ۱۲۲۵ که 35^2 است. برای $n=288$ مجموع می‌شود۴۱۶۱۶ که 204^2 است. الگو برای پیدا کردن عدد بعدی: اگر دقت کنید هر عدد n جدید از فرمول زیر نسبت به دو عدد قبلی به‌دست می‌آید: در واقع اگر عدد قبلی را در شش ضرب کنیم منهای عدد قبل قبلی کنیم و سپس به اضافه دو کنیم عدد جدید به‌دست می‌آید. مثلاً با استفاده از اعداد ۱ و ۸ اینگونه به ۴۹ می‌رسیم: ۶ را در ۸ ضرب می‌کنیم، منهای ۱ و سپس به اضافه ۲ می‌کنیم. یا مثلاً با استفاده از اعداد ۸ و ۴۹ اینگونه به ۲۸۸ می‌رسیم: ۶ را در ۴۹ ضرب می‌کنیم منهای ۸ و سپس به اضافه ۲ می‌کنیم. و به همین ترتیب اعداد بعدی مجموعه ساخته می‌شوند. روش دوم: از $n(n+1)=2k^2$ نتیجه می‌گیریم که از دو عدد n و $n+1$ یکی به شکل r^2 و دیگری به شکل $2s^2$ است و با استفاده از این موضوع n را به‌دست می‌آوریم. در واقع برای حل این سوال می‌توان از معادله پل، که یک معادله معروف در نظریه اعداد است، استفاده کرد. ولی من سعی کردم با الگویابی راه حلی در حد دانش‌آموزان نهم بنویسم. حال با توجه به راه حلی که دانش‌آموزان ارائه می‌دهند در جلسه مصاحبه بایستی پیرامون آن صحبت کرد در واقع این موضوع که آیا این الگو برای اعداد بعدی نیز کار می‌کند جای صحبت دارد که اگر با نوشتن معادله پیش برویم به نتیجه خواهیم رسید.	۵

	ب) رقم یکان هر مربع کامل یکی از ارقام صفر، یک، چهار، پنج، شش و نه است. اگر n بزرگتر یا مساوی پنباشد رقم یکان $1!+2!+3!+\ldots+n!$ برابر ۳ است، زیرا $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ و برای n های بزرگتر یا مساوی ۵، رقم یکان $n!$ برابر صفر می‌شود زیرا ضرب دو عامل دو و پنج را داریم که رقم یکان صفر را تولید می‌کند. بنابراین برای n های بزرگتر از پنج عدد مربع کامل نیست و فقط کافی است به ازای n های یک، دو، سه و چهار بررسی کنیم. که می‌بینیم به ازای n برابر یک و سه عدد مربع کامل می‌شود.	
۶	الف)چند عدد سه رقمی داریم که ارقام آنها از چپ به راست صعودی باشد.یعنی هر رقم از رقم سمت چپ خود بزرگتر باشد.(مانند ۵۷۹ یا ۷۸۹) اب)حاصل جمع تمام این اعداد چقدر است؟ پاسخ : الف) به ازای هر انتخاب سه رقم از ارقام ۱ تا ۹ دقیقا یک عدد با ویژگی خواسته شده وجود دارد. بنا بر این تعداد این اعداد برابر است با $\binom{9}{3} = 84$ ب) مجموع اعداد صدگان برابر است با $\binom{8}{2} \times 1 + \binom{7}{2} \times 2 + \binom{6}{2} \times 3 + \binom{5}{2} \times 4 + \binom{4}{2} \times 5 + \binom{3}{2} \times 6 + \binom{2}{2} \times 7 = 210$ به روش مشابه مجموع ارقام یکان نیز برابر است با $\binom{8}{2} \times 9 + \binom{7}{2} \times 8 + \binom{6}{2} \times 7 + \binom{5}{2} \times 6 + \binom{4}{2} \times 5 + \binom{3}{2} \times 4 + \binom{2}{2} \times 3 = 630$ برای محاسبه مجموع رقم های دهگان.به شکل زیر عمل می کنیم. مثلا می خواهیم ببینیم چند عدد سه رقمی با ارقام صعودی داریم که رقم دهگان آنها ۴ است. در این حالت برای صدگان سه انتخاب داریم(۱و۲و۳) و برای رقم یکان ۵ انتخاب داریم(۵و۶و۷و۸و۹) پس در کل ۱۵ عدد داریم که رقم دهگان آنها ۴ است. بنابراین مجموع ارقام دهگان های این اعداد می شود $(1 \times 7) \times 2 + (2 \times 6) \times 3 + (3 \times 5) \times 4 + (4 \times 4) \times 5 + (5 \times 3) \times 6 + (6 \times 2) \times 7 + (7 \times 1) \times 8 = 300$ پس مجموع تمام این اعداد می شود $210 \times 100 + 300 \times 10 + 630 = 24630$	۶

۷	در هر یک از خانه های یک جدول ۶ در ۶ یکی از اعداد ۱ یا ۱- را گذاشته ایم به طوری که حاصل جمع همه ۳۶ عدد داخل جدول نامنفی شده است. نشان دهید می توان ۳ سطر و ۳ ستون از این جدول را پیدا کرد به طوری که حاصل جمع اعداد واقع در ۹ خانه ی محل برخورد این سطر و ستون ها دست کم برابر ۳ شود. پاسخ : سه سطر و سه ستونی را در نظر می گیریم که مجموع ۹ خانه ی محل برخورد آنها بیشترین مقدار ممکن شود.برای سادگی فرض می کنیم این سه سطر بالا و سه ستون سمت چپ جدول دارای این ویژگی هستند. مربه سه در سه حاصل را A بنامید. حاصل جمع اعداد هر ستون و هر سطر A عددی فرد است. بنابراین سه عدد هرسطر و هر ستون A صفر نمی شود. اگر هیچ سطر یا هیچ ستون مجموع کمتر یا مساوی ۱- نداشته باشد حکم بر قرار است. حال فرض می کنیم A دارای یک سطر و یک ستون با مجموع کمتر یا مساوی ۱- باشد(مثلا سطر اول و ستون اول).  با توجه به انتخاب A نتیجه می شود که هریک از ستون های ۴و۵و۶ در سه درایه بالای خود باید مجموع حداکثر ۱- داشته باشند. یعنی حاصل جمع اعداد ۹ خانه حاصل از برخورد سه سطر بالا و سه ستون سمت راست حداکثر ۳- است. به طریق مشابه حاصل جمع اعداد ۹ خانه حاصل از برخورد سه سطر پاین و سه ستون سمت چپ حداکثر ۳- است. پس از بین دو مربع ۳در۳ که یکی در شمال غربی (همان A) و دیگری در جنوب شرقی قرار دارند دست کم مجموع درایه های یکی می بایست بزرگتر یا مساوی ۳ باشد.	۶
۸	در شکل زیر ABCD یک مربع و E وسط ضلع AB است. نقطه M را روی BC طوری انتخاب می کنیم که پاره خط DM مثلث EBC را به یک مثلث و یک چهارضلعی بامساحت های برابر تقسیم کند. نسبت $\frac{BM}{MC}$ را به دست آورید  	۷

پاسخ :

محل برخورد EC با DM را O و محل برخورد امتداد DM و AB را F می‌نامیم سپس E را به D و F را به C وصل می‌کنیم. مساحت مثلث‌های COM، MBF و MCF را به ترتیب x، y، z فرض می‌کنیم.



در این صورت داریم:

$$S(DEO) = S(OFC) = x + z$$
$$S(ODC) = S(EDC) - S(EDO) = 2S(EBC) - S(EDO) = 4x - (x + z) = 3x - z$$

$$\frac{S(EFO)}{S(EOD)} = \frac{FO}{OD} = \frac{S(FOC)}{S(DOC)} \rightarrow \frac{x+y}{x+z} = \frac{x+z}{3x-z} \rightarrow (x + y)(3x - z) = (x + z)^2 \quad (1)$$

هم چنین از تشابه دو مثلث BFM و MDC با نسبت تناسب $\frac{y}{z}$ داریم:

$$\frac{S(BMF)}{S(MDC)} = (\frac{y}{z})^2 = \frac{y}{4x - z} \qquad (2)$$

به علاوه می‌دانیم که:

$$\frac{4x - z}{z} = \frac{S(MDC)}{S(MCF)} = \frac{DM}{MF} = \frac{CM}{MB} = \frac{S(CMF)}{S(MBF)} = \frac{z}{y} \rightarrow \frac{4x - z}{z} = \frac{z}{y} \qquad (3)$$

قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{y}{z}$ و $\beta = \frac{x}{z}$ یعنی $y = \alpha z$ و $x = \beta z$.

اگر این مقادیر را در رابطه‌ها ۱ و ۳ قرار دهیم به دست می‌آوریم:

$$4\beta - 1 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{و} \quad (\alpha + \beta)(3\beta - 1) = (\beta + 1)^2$$

لذا داریم:

$$\left(\beta + \frac{1}{4\beta-1}\right)(3\beta - 1) = (\beta + 1)^2$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$(4\beta^2 - B + 1)(3\beta - 1) = (\beta + 1)^2(4\beta - 1)$ ➔
$7\beta^3 - 4\beta^2 - 3\beta^2 + 3\beta + \beta - 1 = 4\beta^3 + 8\beta^2 - \beta^2 - 2\beta + 4\beta - 1$ ➔
$7\beta^3 - 7\beta^2 + 4\beta = 4\beta^3 + 7\beta^2 + 2\beta$ ➔
$3\beta^2 - 14\beta + 2 = 0$

پس از یافتن β از طریق رابطه ۲ پاسخ مساله به دست می‌آید.

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید