ردیف	سؤالات و پاسخ ها	امتیاز
۱	یک مجموعه را جمع باز گوییم اگر برای هر دو عضو متمایز مجموعه، حاصل جمع آن دو عضو در مجموعه نباشد. بزرگترین زیرمجموعه اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ که جمع باز باشد چند عضوی است؟ چرا؟ پاسخ: ۱۶ عضوی مجموعه ۱۶ عضوی $\{15و16و17و \dots و30\}$ دارای این ویژگی است. حال ثابت می کنیم یک مجموعه ۱۷ عضوی نمی تواند جمع باز باشد. اگر $A=\{x_1و x_2و \dots و x_{17}\}$جمع باز باشد(عضوها به ترتیب صعودی نوشته شده است) آنگاه از ۱۶ عدد متمایز $x_{17}-x_{16}و \dots و x_{17}-x_3و x_{17}-x_2و x_{17}-x_1$ حداکثر یکی می تواند در A باشد(وقتی x_{17} دوبرابر یکی از اعداد دیگر باشد). اما در این صورت حداقل باید ۱۷+۱۵=۳۲ عضو داشته باشیم. این مطلب را به شکل دیگر نیز می توان ثابت کرد. اگر A یک مجموعه جمع باز باشد و بزرگترین عضو آن n باشد، آنگاه A حداکثر می تواند $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ عضو داشته باشد.(چرا؟) پس بزرگترین زیرمجموعه وقتی به دست می آید که بزرگترین عضو آن ۳۰ باشد که همان مجموعه داده شده است.	۴
۲	اعداد ۱ تا ۱۰۰ را روی تابلو نوشته‌ایم، هربار دو عدد a,b از بین آن‌ها را پاک کرده و اگر $a+b$ فرد است به جای آن $a+b+1$ می‌نویسیم و اگر $a+b$ زوج است به جای آن $a+b-2$ می‌نویسیم این کار را ادامه می‌دهیم تا تنها یک عدد روی تابلو باقی بماند حداقل و حداکثر آن عدد چقدر است؟ پاسخ۱: کل حرکت‌ها برابر با $99=1+2+3+6+12+25+50$ حال اگر x تعداد دفعاتی باشد که $a+b$ (دو عدد انتخاب شده) فرد باشد تعداد دفعاتی که $a+b$ زوج است برابر است با $99-x$ و عدد نهایی برابر است با $1+2+3+\cdots+100+x(1)+(99-x)(-2)=4852+3x$ واضح است که $0\le x\le 50$ (حداکثر وقتی است که هربار یک عدد فرد و یک عدد زوج انتخاب شود که حاصل فرد است و همه اعداد فرد می‌شوند و از آن به بعد عدد زوج داریم) بنابر این $4852\le 4852+3x\le 4852+3(50)=5002$ (۴۸۵۲ وقتی اتفاق می‌افتد که در مرحله اول تمام اعداد فرد باهم جمع شوند که اعداد باقیمانده همگی زوج خواهند بود و از آن به بعد همه اعداد $a+b$ زوج خواهند بود) پس کمترین مقدار ۴۸۵۲ و بیشترین مقدار ۵۰۰۲ است	۴
۳	۵ تیم a, b, c, d, e در یک دوره بازی شرکت کرده‌اند. هر نفر دقیقاً یک بازی با بقیه داشته است (تساوی یک امتیاز، برد ۳ امتیاز، باخت ۰ امتیاز) اگر b نفر دوم باشد و امتیازش با جمع امتیازهای c, e, d برابر باشد نفر سوم چند امتیاز دارد؟	۵

پاسخ :

اگر نفر دوم ۹ امتیاز داشته باشد با بررسی حالات مختلف می توان دید که ۴ حالت در شرایط مساله صدق می کند

شرح	امتیاز	نفر رتبه
از ۴ نفر دیگر برده است	۱۲	اول
از سه نفر بعدی برده است	۹	دوم
از دو نفر بعدی برده است	۶	سوم
از نفر بعدی برده است	۳	چهارم
به همه باخته است	۰	پنجم

شرح	امتیاز	نفر رتبه
از ۳ نفر برده است و با نفر چهارم مساوی کرده است	۱۰	اول
از سه نفر بعدی برده است	۹	دوم
از دو نفر بعدی برده است	۶	سوم
با نفر اول و پنجم مساوی کرده است	۲	چهارم
به ۳ نفر باخته است و با نفر چهارم مساوی کرده است	۱	پنجم

شرح	امتیاز	نفر رتبه
از ۳ نفر برده است و با نفر پنجم مساوی کرده است	۱۰	اول
از سه نفر بعدی برده است	۹	دوم
از نفر چهارم برده است و با نفر پنجم مساوی کرده است	۴	سوم
از نفر بعدی برده است	۳	چهارم
به ۲ نفر باخته است و با نفر اول و سوم مساوی کرده است	۲	پنجم

شرح	امتیاز	نفر رتبه
از ۳ نفر برده است و با نفر پنجم مساوی کرده است	۱۰	اول
از سه نفر بعدی برده است	۹	دوم
از پنجم نفر برده است و با نفر چهارم مساوی کرده است	۴	سوم
از نفر پنجم برده است و با نفر سوم مساوی کرده است	۴	چهارم
با نفر اول مساوی و به سه نفر دیگر باخته است	۱	پنجم

حالت های زیر هم وجود دارد که ما آن را به طور خلاصه معرفی می کنیم و شما می توانید شکل یا جدول آن را بنویسید.

امتیازات به ترتیب رتبه برابر ۱۰و۹و۷و۱و۱ باشد

امتیازات به ترتیب ۱۲و۷و۳و۲و۲ باشد

امتیازات به ترتیب برابر ۱۰و۸و۵و۲و۱ باشد.

امتیازات به ترتیب برابر ۱۰و۹و۵و۴و۰ باشد

بنابراین نفر سوم می تواند امتیاز های ۳یا۴یا۵یا۶یا۷ داشته باشد. به سادگی دیده می شود حالت دیگری وجود ندارد.

۴ یک عدد از مجموعه $A=\{4و8و12و\dots و120\}$ و یک عدد به دلخواه از مجموعه $B=\{-4و-8-12و\dots و-120\}$ انتخاب می‌کنیم. حاصل $\frac{A}{B}$ چند مقدار مختلف دارد؟ ۵

پاسخ :

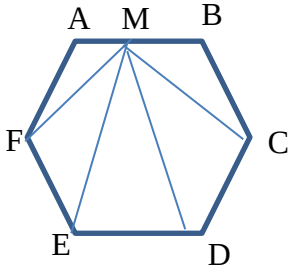
این مساله معادل این است که اگر دو عدد از مجموعه $A=\{1و2و3و\dots و30\}$ انتخاب کنیم حاصل $\frac{A}{B}$ چند مقدار مختلف دارد. ابتدا اعداد بزرگتر از واحد را می شماریم که از تقسیم دو عضو این مجموعه بر هم به دست می آید و از ۳۰ شروع می کنیم با تقسیم ۳۰ بر عددهای دیگر ۳۰ عدد مختلف ۳۰ و ۱۵ و $\frac{30}{3}$ و $\frac{30}{4}$ و۶و....و۱ به دست می آید.اما بعضی این اعداد در تقسیم های دیگر هم به دست می آیند مثلا $\frac{30}{10}$ در $\frac{15}{5}$ و $\frac{6}{3}$ و ۳ نیز به دست می آیند. برای جلوگیری از تکرار، این عدد را در جایی حساب می کنیم که کسر ساده نشود یعنی در تقسیم ۳ بر اعدا کوچکتر از خودش. پس اکنون برای ۳۰ فقط حالاتی را محاسبه می کنیم که کسر ساده نشود و این یعنی تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی ۳۰ در مخرج کسر که نسبت به ۳۰ اول باشد. اگر

	این تعداد را با $\varphi(30)$ نمایش دهیم با شمارش مستقیم یا روش های دیگر داریم این مقدار برابر است با $\varphi(30) = 12$ سپس این کار را برای ۲۹ و ۲۸ و...و۱ انجام می دهیم به دست می آوریم $\varphi(30) + \varphi(29) + \varphi(28) + \cdots + \varphi(1) = 278$ با احتساب عکس این اعداد (به جز عدد ۱) جواب می شود $278 + 277 = 555$	
۵	شورای خانه‌های ریاضیات ایران هر ساله سه مسابقه در قالب تیم‌های سه نفره برگزار می‌کند. این مسابقات عبارتند از مسابقه تیمی ریاضی (متر)، مسابقه کتابخوانی تیمی ریاضی (کتر) و مسابقه مدلسازی ایلیمپیاد. شورای خانه‌های ریاضیات ایران، علاوه بر جوایز معمول در هر مسابقه، سه جایزه تکمیلی نیز طراحی کرده است: "بهترین تیم در مسابقه کتر در بین ۵ تیم برتر در مسابقه متر" "بهترین تیم در مسابقه متر در بین ۵ تیم برتر در مسابقه ایلیمپیاد" "بهترین تیم در مسابقه ایلیمپیاد در بین ۵ تیم برتر در مسابقه کتر" گروه کیهان، محمد و دانیال ادعا کرده است که هر سه جایزه تکمیلی را برده است، هر چند در هیچ مسابقه‌ای در بین سه تیم اول نیست. کمترین تعداد افراد شرکت کننده در مسابقه چند نفر است؟ (تیم‌ها اشتراکی ندارند و هر تیم با یک چینش ثابت در همه مسابقات شرکت کرده است.) پاسخ : از آنجا که گروه کیهان، محمد و دانیال در هیچ کدام از مسابقات جزء سه گروه اول نبوده است و چون کمترین تعداد افراد را می‌خواهیم، پس در بهترین حالت، گروه کیهان در هر سه مسابقه، چهارمین گروه بوده است. حال سه گروه اول مسابقه کتر را با K_1، K_2، K_3، سه گروه اول مسابقه متر را با M_1، M_2، M_3 و سه گروه اول مسابقه ایلیمپیاد را با A_1، A_2، A_3 نشان می‌دهیم. می‌خواهیم ثابت کنیم هیچ گروه مشترکی بین این سه گروه اول مسابقات وجود ندارد. برهان خلف: فرض کنید دو گروه از این گروه‌ها مشترک باشند، مثلاً M_2 و A_1 . (به دلیل تقارن موجود در مسئله برای سه گروه اول فرقی نمی‌کند و حالات دیگر نیز مشابه هستند.) در این‌صورت گروه M_2 در مسابقه متر بهتر از گروه کیهان است و بنابراین بهترین تیم در مسابقه متر در بین ۵ تیم برتر در مسابقه ایلیمپیاد گروه کیهان نیست و M_2 است. بنابراین برای سه گروه اول مسابقات کتر، متر و ایلیمپیاد، به ۹ گروه نیاز داریم (چون مشترک نداریم). پس با احتساب گروه کیهان ما به حداقل ۱۰ گروه نیاز داریم. مثالی که در ادامه می‌آوریم نشان می‌دهد که ۱۰ گروه کافی نیز هست. و جواب سوال ۳۰ نفر می‌شود.	۵

	۱	۲	۳	۴	۵
کتر	K_1	K_2	K_3	گروه کیهان	M_1
متر	M_1	M_2	M_3	گروه کیهان	A_1
ایلیمپیاد	A_1	A_2	A_3	گروه کیهان	K_1

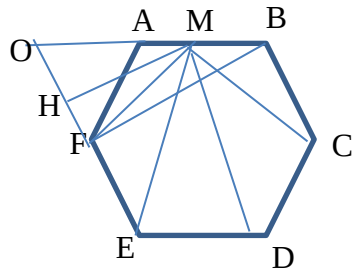
۶	اگر n یک عدد طبیعی باشد که بتوان آن را به صورت $x^{11}y^{15}$ نوشت که x و y دو عدد طبیعی هستند نشان دهید n را می توان به صورت t^4z^7 نوشت که t و z دو عدد طبیعی باشند. پاسخ : فرض کنید $n = {p_1}^{a_1}{p_2}^{a_2} \dots {p_k}^{a_k}$. هر یک از a_i را می توان به صورت جمع دو عدد که یکی مضرب ۱۱ و دیگری مضرب ۱۵ است نوشت.حال به ازای هر i می توان نتیجه گرفت که $a_i = 11$ یا $a_i = 15$ یا $a_i \geq 22$. در هر سه حالت را می توان به شکل جمع دو عدد که یکی مضرب ۴ و یکی مضرب ۷ استنوشت و بنابراین حکم درست است.	۵
۷	فرض کنید n یک عدد طبیعی است. علی و آرمان این بازی را انجام می دهند ابتدا علی سه رقم متمایز بین ۰ تا ۹ را انتخاب می کند.و سپس آرمان رقم های انتخاب شده را به ترتیبی که خودش انتخاب می کند در کنار هم می نویسد که یک عدد ۲ یا ۳ رقمی ایجاد شود(۲ رقمی وقتی ایجاد می شود که رقم صفر بین ارقام انتخاب شده باشد و در سمت چپ قرار گیرد). اگر عدد حاصل بر n بخش پذیر شد علی برنده است و در غیر این صورت آرمان برنده است. به ازای چه مقادیری از علی طوری می تواند بازی کند که آرمان نتواند جلوی پیروزی علی را بگیرد؟ پاسخ : برای n=1 و n=2 (با انتخاب ۲و۴و۶) و برای n=3 (با انتخاب ۳و۶و۹) و برای n=4 (با انتخاب ۰و۴و۸) و برای n=6 (با انتخاب۴و۶و۸) و برای n=9 (با انتخاب۱و۲و۶) و برای n=12 (با انتخاب ۰و۴.۸) و برای n=18 (با انتخاب۴و۶و۸) علی می تواند برنده شود. برای سایر n ها فرض کنید علی ارقام a و b و c را انتخاب کرده باشد در این صورت تنها در وضعیتی می تواند برنده شود که هر عدد سه رقمی ساخته شده بر n بخش پذیر باشد. اما توجه کنید که داریم $\overline{abc} - \overline{acb} = 9(b - c)$. پس a و b و c باید طوری نتخاب شود که ۹ برابر تفاضل هر دو رقم انتخابی بر n بخش پذیر باشد.اما به سادگی دیده می شود که اگر n عامل اولی به جز ۲ و ۳ داشته باشد از بین هر سه رقم متمایز حداقل دو رقم وجود دارد که تفاض آنها بر آن عامل بخش پذیر نیست. پس لازم است n فقط عامل اول ۲و۳ داشته باشدو با بررسی حالات مختلف می بینیم همان اعداد ذکر شده داری این ویژگی هستند.	۶

۸ مطابق شکل نقطه M روی ضلع AB از شش ضلعی منتظم ABCDEF قرار دارد ضلع را به دو قسمت به طول AM= x و MB= y تقسیم کرده است ثابت کنید $\frac{S(FME)}{S(CMD)} = \frac{2x+y}{2y+x}$



پاسخ :

ابتدا B را به F وصل می کنیم. به سادگی به دست می آید که BF بر FE عمود است. سپس AB و EF را امتداد می دهیم تا در O یکدیگر را قطع کنند.مثلث AOF متساوی الاضلاع است و لذا $OA = AF = x + y$.



حال MH را بر OF عمود می کنیم از تشابه دو مثلث MOH و BOF داریم $\frac{MH}{BF} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow MH = \frac{2x+y}{2x+2y}$ BF.

به طریق مشابه فاصله M از CD برابر است با $\frac{2y+x}{2x+2y}$ و از این دو رابطه حکم به دست می آید.

روش دوم : در شکل بالا زاویه O برابر ۶۰ درجه است داریم $MH = \frac{\sqrt{3}}{2}MO = \frac{\sqrt{3}}{2}(2x + y)$ و به طریق مشابه فاصله M از CD برابر است با $\frac{2y+x}{2x+2y}$ بنابر این چون قاعده های دو مثلث MFE و MCD برابرند نسبت مساحت ها برابر است با نسبت ارتفاع ها یعنی $\frac{2x+y}{2y+2x}$

۶

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید