دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیر توجه کنید.

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

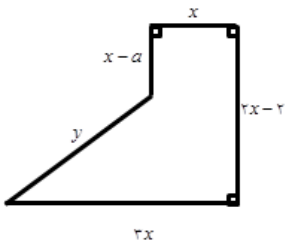
ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	یک صیاد روزی تعدادی ماهی شیر و سُرخو صید کرد. تعداد ماهی‌های سُرخو۳برابر تعداد ماهی‌های شیر بود. او در nساعت، هر ساعت ۶ ماهی سُرخو و ۴ ماهی شیر را فروخت. بعد از nساعت ۶۰ ماهی سُرخو و ۴ ماهی شیر برایش باقی ماند. صیاد در ابتدا چه تعداد ماهی صید کرده‌است. پاسخ:اگر تعداد ماهی‌های شیر mباشد تعداد ماهی‌های سُرخو $3m$می‌شود و تعدادماهی‌های شیر فروخته شده $4n$ و تعداد ماهی‌های سُرخو فروخته شده $6n$است. لذا $m-4n=4\Rightarrow m=4n+4$ $3m-6n=60\Rightarrow 3(4n+4)-6n=60$ $12n+12-6n=60\Rightarrow 6n=60-12\Rightarrow 6n=48\Rightarrow 6n=48\Rightarrow n=8$ $m-4\times 8=4\Rightarrow m=36$ تعداد ماهی‌های شیر صید شده $3\times 36=108$ تعداد ماهی‌های سُرخو صید شده $108+36=144$ تعداد کل ماهی‌های صید شده	۳
۲	۱- نشان دهید:عدد $A=\underbrace{11\ldots1}_{\text{۱۲ تا یک}}\underbrace{888\ldots8}_{\text{۸تا۳۰}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{۱۸ یک}}$ بر۹۹۰۰۰۰۹(۳۰ تا ۹) بخش‌پذیر است. پاسخ: ابتدا نشان می‌دهیم Aبر۱۱۰۰۰۱(۳۰تا یک) بخش‌پذیر است. $A=11\ldots1888\ldots811\ldots1=110001\times 1\underbrace{000\ldots0}_{\text{۱۱تا صفر}}7\underbrace{000\ldots0}_{\text{۱۷تا صفر}}1$ چون مجموع ارقام ۱۰۰۰...۰۷۰...۰۱ برابر ۹ است پس این عدد مضرب ۹ است. بنابراین داریم. $A=11\ldots1\times 9k$و در نتیجه $A=99\ldots9k$مضرب ۹۹...۹است.	۴

۳	یک زنجیر داریم: شامل ۲۳ حلقه است. وزن حلقه‌ها از یک گرم تا ۲۳ گرم می‌باشد و هیچ دو حلقه‌ای وزن یکسان ندارد. اما ۱۵ تا حلقه‌ها از جنس مس و ۷ تا حلقه‌ها از جنس برنج و یکی از حلقه‌ها از جنس طلا است. اگر مجموع وزن حلقه‌های از جنس مس ۱۹ گرم کمتر از مجموع وزن حلقه‌های از جنس برنج باشد، وزن حلقه از جنس طلا چند گرم است؟مسئله چند جواب دارد؟. پاسخ: وزن زنجیر $۱+۲+۳+\cdots+۲۳=\frac{۲۴\times ۲۳}{۲}=۲۷۶$ $w=$ وزن حلقه از جنس طلا $x=$ مجموع وزن حلقه‌های از جنس مس $x+۱۹=$ مجموع وزن حلقه‌های از جنس برنج $x+x+۱۹+w=۲۷۶\rightarrow ۲x+w=۲۵۷$ $۱+۲+\cdots+۱۵=۱۲۰\Rightarrow x\geq ۱۲۰$ $۱۷+۱۸+۱۹+\cdots+۲۳=۱۴۰\Rightarrow x+۱۹\leq ۱۴۰\Rightarrow x\leq ۱۲۱$ $\Rightarrow x=۱۲۰$ یا $x=۱۲۱$ $\quad x=۱۲۰\Rightarrow w=۱۷$ $\quad x=۱۲۱\Rightarrow w=۱۵$ مسئله دو جواب دارد.	۴
۴	۱۳ پارچ با ظرفیت ۱ و ۲ و ۳ و ... و۱۳ لیتری در اختیار داریم که همه پر از آب هستند(دو پارچ با ظرفیت برابر وجود ندارد) همچنین ۵ دبه ۱۶ لیتری خالی در اختیار داریم. ایلیا همهٔ آب یکی از پارچها را در یکی از دبه‌ها می‌ریزد. بعد آرزو همهٔ آب یکی از پارچها را در یکی از دبه‌ها می‌ریزد به ترتیب ایلیا و آرزو این کار را ادامه می‌دهند. کسی که نتواند همهٔ آب پارچی را در دبه‌ای بریزد بازنده است. آیا ایلیا می‌تواند برندهٔ بازی باشد؟ چگونه؟ پاسخ: بله اگر ایلیا ابتدا پارچ یک لیتری را در دبه‌ای بریزد. بعد آرزو هر کدام از پارچها را انتخاب کند، ایلیا پارچی را انتخاب می‌کند، که جمع ظرفیت آنها ۱۵ لیتر شود.(مثلاً اگر آرزو پارچ ۴ لیتری انتخاب کند. ایلیا پارچ ۱۱ لیتری انتخاب می‌کند) بدین ترتیب بعد از اینکه ۱۱ تا از پارچها خالی شد. یک دبه ۱۶ لیتر و بقیه ۱۵ لیتر آب در داخل آنها است و از پارچهای باقی‌مانده، آرزو هر پارچی را انتخاب کند به علت آن‌که ظرفیت آنها بیشتر ازیک لیتر است نمی تواند همهٔ آب پارچی را در دبه‌ای بریزد.پس آرزو بازنده است و ایلیا برنده می‌شود.	۵

۵

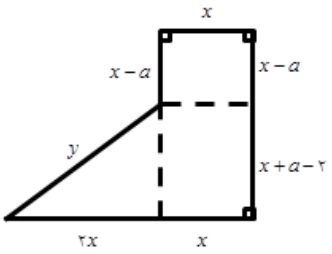
مساحت شکل مقابل از ۳ برابر مساحت مربع به ضلع x، ۶ واحد کمتر است.(a عدد طبیعی است)

اگر محیط شکل برابر $m+n\sqrt{5}$ باشد. مقدار m و n را بیابید.



۶

پاسخ:اگر شکل را به یک مستطیل و یک ذوزنقه تبدیل کنیم، اندازه‌های روی شکل بر حسب x و a مانند شکل زیر می‌شود.



$$(۲x-۲)-(x-a)=x+a-۲\Rightarrow y=\sqrt{(۲x)^۲+(x+a-۲)^۲}$$

و مساحت ذوزنقه + مساحت مستطیل = مساحت شکل

و چون مساحت مربع به ضلع x، $x^۲$ است داریم: مساحت شکل $=۳x^۲-۶$

در نتیجه $x(x-a)+\frac{۱}{۲}\times(x+۳x)(x+a-۲)=۳x^۲-۶$

$$x^۲-ax+۲x^۲+۲ax-۴x=۳x^۲-۶$$

$$ax-۴x=-۶\Rightarrow x(a-۴)=-۶\Rightarrow x=\frac{-۶}{a-۴}=\frac{۶}{۴-a}\geq ۰\Rightarrow$$ a عددطبیعی کوچکتر از ۴ است

بنابراین:

$a=۱\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=\sqrt{۱۶+۱}=\sqrt{۱۷}$ ×

$a=۲\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=\sqrt{۳۶+۹}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$ ✓

$a=۳\Rightarrow x=۶\Rightarrow y=\sqrt{۱۴۴+۴۹}=\sqrt{۱۹۳}$ ×

محیط $=۳+۴+۶+۳\sqrt{۵}+۱=۱۴+۳\sqrt{۵}\Rightarrow m=۱۴\quad n=۳$

۶ اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را در یک جدول به صورت زیر (قطری) چیده ایم

۱	۳	۴	۱۰	۱۱				...
۲	۵	۹						
۶	۸							
۷								
⋮								

عدد ۵۰۰ در کدام سطر و ستون قرار دارد؟

پاسخ:

قطرها را در نظر بگیرید

قطر اول قطر دوم

۱	۳	۴	۱۰	۱۱	۲۱	۲۲		...
۲	۵	۹	۱۲					
۶	۸	۱۲						
۷	۱۴							
⋮								

در قطرهای ۱ و۳و ۵ و ...(قطر با شماره فرد) اعداد از بالا به پایین اعداد زیاد می‌شوند در قطر شماره $2n+1$ اولین عضو در ستون $2n+1$ و سطر ۱ قرار دارد دومین عضو در ستون $2n$ و سطر ۲ و سومین عضو در ستون $2n-1$ و سطر ۳ و الی آخر قرار دارد

در قطر زوج $2n$ ، که از پایین به به بالا اعداد زیاد می‌شوند اولین عضو در ستون ۱ و سطر $2n$ قرار دارد دومین عضو در ستون ۲ و سطر $2n-1$ قرار دارد و عدد بعدی در ستون ۳ و سطر $2n-2$ قرار دارد و الی آخر

همچنین در قطر اول یک عدد، در قطر دوم ۲ عدد، و ... و در قطر n ام n ، عدد قرار دارد ولذا از نامعادله $1+2+3+\cdots+n \le 500$ داریم

$\frac{n(n+1)}{2} \le 500 \to n(n+1) \le 1000 \to n \le 31$

$(31 \times 32 = 992, 32 \times 33 = 1059)$

لذا تا قطر ۳۱ ام تعداد $\frac{31\times32}{2} = 496$ عدد قرار می‌گیرد و ۴ عدد بعدی در قطر ۳۲ قرار می‌گیرند لذا عدد ۵۰۰ در قطر ۳۲ یعنی در ستون $1+3=4$ و سطر $32-3=29$ ام قرار می‌گیرد.

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید