مرحله سوم پنجمین مسابقه متر (بخش کتبی)

پایه یازدهم

تاریخ :۲ / ۵ / ۱۴۰۵ وقت : ۱۰۵

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematics Team Competition متر مسابقه تیمی ریاضی

مشخصات اعضای تیم
۱-
۲-
۳-
نام خانه ریاضیات :

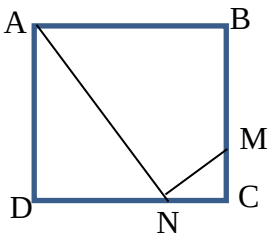
دانش آموزان عزیز با آرزوی موفقیت شما در مرحله سوم مسابقه متر، لطفا به موارد زیر توجه نمایید

۱- اعضای هر تیم پس از تفکر و مشورت با یکدیگر **راه حل کامل** هر سوال را با خط خوانا زیر آن سوال بنویسند.

۲- هر تیم باید به ۸ سوال پاسخ دهد

۳- استفاده از ماشین حساب ممنوع می باشد

۴- این آزمون شامل ۸ سوال با جمع ۳۰ امتیاز می باشد.

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	در مربع ABCD نقطه N روی DC و نقطه M روی BC طوری هستند که AN=3 و MN=0/75 و AN بر MN عمود است مساحت مربع را به دست آورید.  پاسخ : فرض کنیم $DN=x\,,NC=y\,,CM=z$ از تشبه دو مثلث $ADN\,,NCM$ داریم $\frac{AD}{NC}=\frac{DN}{MC}=\frac{3}{0/75}=4\Rightarrow\frac{x+y}{y}=4\Rightarrow\frac{x}{y}+1=4\Rightarrow x=3y$ بنابراین $DN=3y\,,AD=4y$ پس طبق رابطه فیثاغورس داریم $16y^2+9y^2=9\Rightarrow y=\frac{3}{5}\Rightarrow AD=\frac{12}{5}\Rightarrow S=\frac{144}{25}=5/76$	۲
۲	نامعادله زیر را حل کنید: $\frac{۴x^۲}{(۱-\sqrt{۱+۲x})^۲}<۲x+۹$ پاسخ : $\frac{۴x^۲}{(۱-\sqrt{۱+۲x})^۲}\times\frac{(۱+\sqrt{۱+۲x})^۲}{(۱+\sqrt{۱+۲x})^۲}=\frac{۴x^۲(۱+\sqrt{۱+۲x})^۲}{۴x^۲}=(۱+\sqrt{۱+۲x})^۲$ بنابراین داریم $2+2x+2\sqrt{1+2x}<2x+9\Rightarrow 2\sqrt{1+2x}<7\Rightarrow 4+8x<49\Rightarrow x<\frac{45}{8}$ همچنین باید $1+2x>0\Rightarrow x>\frac{-1}{2}$ پس جواب نامعادله می شود $\frac{-1}{2}<x<\frac{45}{8}$	۳

۳	تابع خطی f محور طول ها را در ۳ قطع کرده است و می دانیم $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x^3+3x^2+3x-7}$ وجود دارد. حاصل حد را به دست آورید پاسخ : فرض کنیم $f(x)=ax+b$ طبق فرض داریم $f(3)=0$. همچنین چون حد وجود دارد داریم $f(1)=4$. بنابراین $f(x)=-2x+6$. در نتیجه $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{-2x+6}-2}{x^3+3x^2+3x-7}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+2}{((x+1)^3-8)\left(\sqrt{-2x+6}+2\right)}$$ $$=\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+7)\left(\sqrt{-2x+6}+2\right)}=\frac{-2}{48}$$	۳
۴	زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ به طوری‌که مجموع هیچ دو عضوی از آن بر عدد ۷ بخش پذیر نباشد حداکثر چند عضو دارد؟ پاسخ: باقیمانده اعداد بر۷ برابر ۰و۱و۲و۳و۴و۵و۶ است پس ۷ مجموعه در نظر می‌گیریم $(A_m, 0\le m\le 6)$ مجموعه اعداد کمتر از ۱۰۰۰ که باقیمانده آن‌ها بر ۷ برابر m است ما همزمان نمی‌توانیم از مجموعه‌های A_1 و A_6 هر دو عضو، انتخاب کنیم چون مجموع باقیمانده مجموع آن دو عضو بر عدد ۷ برابر $1+6$ است که بر ۷ بخش پذیر است به‌طور مشابه همزمان نمی‌توانیم از مجموعه‌های A_2 و A_5 و همچنین A_3 و A_4 عضو انتخاب کنیم از سوی دیگر $n(A_1)=n(A_2)=n(A_3)=n(A_4)=n(A_5)=143$ و $n(A_0)=142$ و $n(A_6)=142$ لذا بیشترین تعداد اعضای زیرمجموعه جواب وقتی است که همه اعضای A_1 انتخاب شوند و از بین A_2 و A_5 همه اعضای یکی و از بین A_3 و A_4 همه اعضای یکی انتخاب شوند و از A_0 نیز حداکثر یک عضو می‌توان انتخاب کرد لذا حداکثر تعداد اعضای این مجموعه برابر $3(143)+1=430$ عضو می‌باشد.	۳

۵	اگر $A(0,3)\ ,B(4,0)\ ,D(k,k+2)$ سه راس مستطیل ABCD باشند نشان دهید اختلاف طول و عرض راس C ثابت است. اگر این مستطیل مربع باشد مختصات راس c را به دست آورید.  پاسخ : فرض کنیم $C(x,y)$ چون بردار AB برابر اسا با بردار DC داریم : $0-3=y-(k+2)\ ,4-0=x-k \Rightarrow y=k-1\ ,x=4+k \Rightarrow x-y=5$ حال برای اینکه چهارضلعی مربع باشد باید AD بر DC عمود و با آن برابر باشد $\sqrt{(k-1)^2+k^2}=5 \Rightarrow 2k^2-2k-24=0 \Rightarrow k=4$ یا $k=-3$ که با بررسی عمود بودن فقط جواب $k=-3$ درست است.	۳
۶	یک عدد سه رقمی به تصادف انتخاب می کنیم، اگر رقم صدگان آن از رقم یکان آن کوچکتر باشد احتمال آن را حساب کنید که این عدد زوج باشد؟ پاسخ : اگر A پیشامد آن باشد که رقم صدگان عدد کوچکتر از رقم یکان آن باشد و B پیشامد زوج بودن عدد باشد احتمال $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ را باید حساب کنیم. رای محاسبه تعداد اعداد سه رقمی که رقم صدگان آنها کمتر از رقم یکان آنها است. ابتدا دو رقم از ارقام ۱ تا۹ انتخاب می کنیم و سپس رقم کوچکتر را در صدگان و دیگری را در یکان می گذاریم و سپس رقم دهگان را یکی از ارقام ۰ تا ۹ قرار می دهیم. پس تعداد این اعداد می شود $\binom{9}{2}\times 10=360$ تعداد اعداد دارای این ویژگی که زوج هستند را نیز باید بشماریم. رقم یکان این اعداد ۲یا ۴ یا ۶ یا ۸ می باشد و برای هر کدام رقم صدگان و دهگان را به 10×7 و 10×5 و 10×3 و 10×1 روش می توان انتخاب کردو پس تعداد این اعداد می شود $10+30+50+70=160$ و در نتیجه احتمال مطلوب می شود $\frac{4}{9}$	۵
۷	ثابت کنید به ازای هر x داریم $\frac{1}{4}\leq sin^6x+cos^6x\leq 1$ پاسخ : با توجه به اتحاد مکعب دوجمله ای داریم	۵

	$sin^6x+cos^6x=(sin^2x+cos^2x)^3-3sin^4xcos^2x-3sin^2xcos^4x=$ $1-3sin^2xcos^2x(sin^2x+cos^2x)=1-3sin^2xcos^2x$ حال ثابت می کنیم $y=sin^2xcos^2x\le\frac{1}{4}$ $y=sin^2x(1-sin^2x)=-sin^4x+sin^2x$ ماکزیمم این عبارت وقتی به دست می آید که $\sin x=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ و این ماکزیمم برابر است با بنابراین $y=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ $sin^2xcos^2x\le\frac{1}{4}\Rightarrow -3sin^2xcos^2x\ge\frac{3}{4}\Rightarrow 1--3sin^2xcos^2x\ge\frac{1}{4}$ از طرف دیگر داریم $sin^6x\le sin^2x$ و $cos^6x\le 2x\Rightarrow sin^6x+cos^6x\le sin^2x+cos^2x=1$	
۸	اگر x, y, z اعدادی صحیح باشند و x+y+z=0، ثابت کنید که $2(x^4+y^4+z^4)$ مربع کامل است. پاسخ: بنابر فرض مسئله، x=-y-z بنابراین داریم $x^4=(y+z)^4$ بنابراین $(x^4+y^4+z^4)2=2((y+z)^4+y^4+z^4)$ $=2(2y^4+2z^4+4y^3z+6y^2z^2+4yz^3)$ $=4(y^4+z^4+2y^3z+3y^2z^2+2yz^3)$ $=4(y^2+z^2+yz)^2$	۵
	دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید	