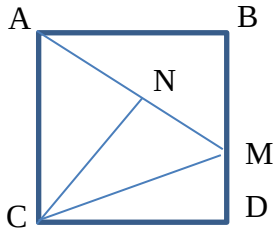
| ردیف | سؤالات | امتیاز |
|---|---|---|
| ۱ | حاصل عبارت زیر را به ساده ترین شکل به دست آورید<br>$(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{13})(-\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{13})(\sqrt{5}-2\sqrt{3}+\sqrt{13})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{13})$<br>پاسخ :<br>$(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{13})(-\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{13}) =$<br>$(2\sqrt{3}+\sqrt{13})^2-5=25+4\sqrt{39}-5=4\sqrt{39}+20$<br>$(\sqrt{5}-2\sqrt{3}+\sqrt{13})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}-\sqrt{13}) =$<br>$5-(2\sqrt{3}-\sqrt{13})^2=5-25+4\sqrt{39}=4\sqrt{39}-20$<br>بنابراین داریم :<br>$(4\sqrt{39}+20)\times(4\sqrt{39}-20)=16\times39-400=224$ | ۲ |
| ۲ | در مربع ABDC نقطه M روی BD طوری است که BM دو برابر DM است.اگر N وسط AM باشدمساحت مثلث ACN چه کسری از مساحت مربع است؟<br>پاسخ :<br><br><br>فرض کنیم $MD=x$ پس $BM=2x$ پس داریم<br>$S(CDM)=\frac{x\times3x}{2}=\frac{3}{2}x^2$ , $S(ABM)=\frac{2x\times3x}{2}=3x^2$<br>در نتیجه $S(AMC)=9x^2-\frac{9}{2}x^2=\frac{9}{2}x^2$ و بنابراین<br>$S(ACN)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}x^2=\frac{9}{4}x^2$<br>که یک چهارم مساحت مربع است. | ۳ |
| ۳ | چهار دسته کارت شامل ۱۵ و ۱۸ و ۲۱ و ۳۰ کارت داریم. دو نفر با این کارت ها بازی زیر را انجام می دهند. هر نفر باید در نوبت خود یک دسته را انتخاب کند و به ۲ دسته تقسیم کند بازنده کسی است که نتواند کار را ادامه دهد. الف) آیا می توان گفت نفر اول می تواند برنده شود؟ ب) این بازی به چند صورت می تواند تمام شود؟<br>پاسخ :<br>روی هم ۸۴ کارت وجود دارد. بازی زمانی تمام می شود که کارت ها به ۸۴ دسته یک کارتی تقسیم شود. در این زمان نوبت نفر اول است و نمی تواند بازی کند. پس در هر صورت نفر اول بازنده است.<br>ب) هر دسته n تایی به n-1 روش می تواند به n دسته یک تایی تقسیم شود پس طبق اصل ضرب این بازی به $14\times17\times20\times29=138040$ صورت می تواند تمام شود | ۳/۵ |

| | | |
|---|---|---|
| ۴ | مجموعه جواب‌های نامعادله $x\|x-2\|>2-x$ را بدست آورید. | ۳/۵ |

پاسخ:

$x=2$ جواب نامعادله نیست.

$x>2 \Rightarrow x>\frac{2-x}{|x-2|} \Rightarrow x>\frac{2-x}{x-2} \Rightarrow x>-1$ تمام اعداد بزگتر از ۲جوابند

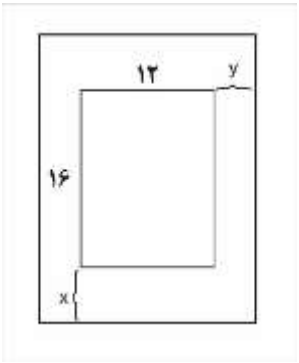
$x<2 \Rightarrow x>\frac{2-x}{|x-2|} \Rightarrow x>1 \Rightarrow 1<x<2$

پس جواب به صورت بازه می شود $(1,2)\cup(2,+\infty)$

| | | |
|---|---|---|
| ۵ | عکسی به ابعاد ۱۶ و۱۲ سانتی‌متر درون یک قاب مستطیلی قرار دارد مساحت ناحیه بین عکس و لبه‌های قاب ۲۸۸ سانتی‌متر مربع است . محیط خارجی قاب ۸۸ سانتی‌متر است فاصله لبه‌های چپ و راست عکس تا قاب برابر و همچنین فاصله برای بالا وپایین آن تا قاب برابر است. فاصله عکس تا هر ضلع قاب چه مقدار(مقادیری) می‌تواند باشد | ۴ |

پاسخ:

با توجه به شکل برای محیط خارجی قاب داریم




$$2[(12+2y)+(16+2x)]=88 \rightarrow x+y=8 \quad (1)$$

از سوی دیگر مساحت قاب برابر است با $288+12\times16=480$

$$(16+2x)(12+2y)=480 \rightarrow (x+8)(y+6)=120 \quad (2)$$

از رابطه $(1),(2)$ داریم $(x+8)(8-x+6)=120 \rightarrow 112+6x-x^2=120$

یا $x^2-6x+8=0$ اگر $x=2$ یا $x=2,4$ آنگاه $y=6$ و اگر $x=4$ آن‌گاه $y=4$

| | | |
|---|---|---|
| ۶ | هر خانواده‌ای که از دوچرخه یا حمل‌ونقل عمومی استفاده کند، در کاهش مصرف سوخت و پاک‌تر شدن هوای شهر نقش دارد.<br><br>در یک نظرسنجی از ۱۲۰ خانواده مشخص شد، ۲۵ خانواده از هیچ‌کدام از «دوچرخه» و «مترو» استفاده نمی‌کنند، ۳۰ خانواده هم از دوچرخه و هم از مترو استفاده می‌کنند؛ تعداد خانواده‌هایی که فقط از دوچرخه استفاده می‌کنند، ۱۵ خانواده بیشتر از خانواده‌هایی است که فقط از مترو استفاده می‌کنند.<br>اکنون به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:<br><br>آ) چند خانواده فقط از دوچرخه استفاده می‌کنند؟<br><br>ب) چند خانواده در کاهش آلودگی هوا نقش دارند؟ پ. اگر یک خانواده به‌طور تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه در کاهش آلودگی هوا نقش داشته باشد چقدر است؟<br><br>پاسخ : الف. مدل‌سازی و خلاصه‌نویسی داده‌های مسئله:<br>نه از دوچرخه و نه از مترو استفاده می‌کنند:25 نفر هم از دوچرخه و هم از مترو=۳۰ نفر<br>فقط از دوچرخه:b فقط از مترو: m $b = m + 15$<br>یا از دوچرخه یا از مترو استفاده می‌کنند: نفر $120 - 25 = 95$<br><br>$$b + (b - 15) + 30 = 95 \to 2b + 15 = 95 \to 2b = 80 \to b = 40$$<br><br>ب. چند خانواده در کاهش آلودگی هوا نقش دارند؟<br>تعداد افرادی که یا از دوچرخه یا از مترو استفاده می‌کنند: نفر $120 - 25 = 95$<br><br>پ. اگر یک خانواده به‌طور تصادفی انتخاب شود، احتمال اینکه در کاهش آلودگی هوا نقش داشته باشد چقدر است؟<br><br>$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{95}{120} = \frac{19}{24} \approx 79\%$$ | ۴ |

| | | |
|---|---|---|
| ۷ | x و y دو عدد طبیعی هستند که $(x^2+y)(x+y^2)=(x+y)^3$ بیشترین مقدار $x^2+y$ چقدر است؟<br><br>پاسخ :<br>$(x^2+y)(x+y^2)=(x+y)^3 \Rightarrow x^3+x^2y^2+xy+y^3$<br>$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \Rightarrow x^2y^2+xy=3x^2y+3xy^2$<br>با تقسیم دو طرف بر $xy$ به ست می آید:<br>$xy+1=3x+3y \Rightarrow xy-3x-3y+1=0 \Rightarrow (x-3)(y-3)=8$<br>با توجه به طبیعی بودن اعداد چهر حال زیر را داریم<br>$x-3=2\,,y-3=4$ و $x-3=1\,,y-3=8$<br>و $x-3=8\,,y-3=1$ و $x-3=4\,,y-3=2$<br>که بیشترین مقدار $x^2+y$ به ازای $x=11\,,y=4$ به دست می آید و برار است با ۱۲۵ | ۵ |
| ۸ | چهار عدد تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک عدد طبیعی می دهند و بزرگترین آنها مساوی مجموع مربعات سه عدد دیگر است. این ۴ عدد را به دست آورید.<br>پاسخ :<br>چهار عدد مطلوب را $x-d$ و $x$ و $x+d$ و $x+2d$ می نامیم. طبق فرض سوال داریم<br>$x+2d=x^2+(x+d)^2+(x-d)^2 \Rightarrow x+2d=3x^2+2d^2$<br>از رابطه اخیر داریم $3x^2-x+2d^2-2d=0$ اگر این راطه را یک معادله درجه دوم بر حسب $x$ بگیریم داریم:<br>$\Delta=1-4(3)(2d^2-2d)=1-24(d^2-d)$<br>که چون $d$ یک عدد طبیعی است، فقط به ازای $d=1$ غیر منفی است و اگر $d$ =۱آنگاه $x=0$ یا $x=\frac{1}{3}$<br>در نتیجه ۴ عدد عبارتند از -۱و۰و۱و۲ یا $\frac{-2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{4}{3}$ و $\frac{7}{3}$ | ۵ |

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید