مرحله سوم پنجمین دوره مسابقه متر (بخش کتبی)

پایه هشتم

تاریخ : ۱۴۰۵/۰۵/۰۲ وقت : ۹۰ دقیقه

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.

۲- اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.

۳- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۴- این آزمون شامل ۸ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.

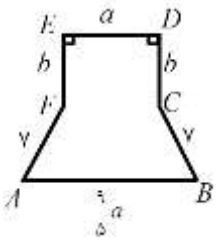
خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

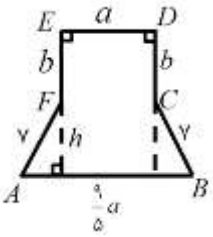
ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	اگر هادیه ۲ سال بعدتر و ماریه ۳ سال قبل‌تر از سال تولدشان به‌دنیا می آمدند با همدیگر هم سن می شدند. دو سال پیش سن هادیه دو برابر سن ماریه بوده است. اکنون هادیه چند ساله است؟ پاسخ: از صورت مسئله معلوم می‌شود. سن ماریه ۵سال کمتر از سن هادیه است. اگر سن هادیه x باشد. سن ماریه $x-5$ است و سن آنها در دو سال پیش $x-2$ و $x-7$ می‌شود پس $x-2=2(x-7)\Rightarrow x-2=2x-14\Rightarrow 14-2=2x-x\Rightarrow x=12$	۳
۲	هر سه دقیقه ، یک تاکسی از فرودگاه به طرف مرکز شهر حرکت می کند. یک خودرو هم زمان با یکی از تاکسی ها از فرودگاه خارج می شود و از همان مسیر به مرکز شهر می رود . هر تاکسی این مسیر را در ۶۰ دقیقه و خودرو در ۳۵ دقیقه طی می کند. دراین مسیر ، خودرو از چند تاکسی (به جز تاکسی که همان زمان با آن از فرودگاه خارج شده است)جلو می زند؟ پاسخ: خودرو،۲۵ دقیقه کمتر از هر تاکسی در راه است . پس باید ببینیم چند تاکسی حداکثر ۲۵ دقیقه قبل از تاکسی حرکت کرده اند . تاکسی ها،۳،۶،۹،...،۲۴، ۲۷ و... دقیقه قبل از خودرو حرکت کرده اند . بنابراین آخرین تاکسی که خودرو از کنارش رد می شود ، تاکسی است که ۲۴ دقیقه قبل از خودرو حرکت کرده است . یعنی خودرو از $۲۴\div ۳=۸$ تاکسی جلو می زند.	۳
۳	علی و رضا در یک مسابقه ۲۰سؤالی شرکت می‌کنند. برای هر پاسخ درست ۳ امتیاز کسب می‌کنند و برای هر پاسخ نادرست ۳ امتیاز از امتیازات آنها کم می‌شود. وقتی داوران امتیاز علی را ۱۸ و امتیاز رضا را ۱۵ اعلام کردند رضا می‌گوید حتماً اشتباهی رخ داده است. الف) علی به چند سؤال پاسخ درست داده است؟ پاسخ: الف: اگر x تعداد پاسخ‌های درست علی باشد، $۲۰-x$ تعداد سؤال‌های نادرست او است. پس $۳x$ امتیاز مثبت و $۳(۲۰-x)$ امتیاز منفی لذا $۳x-۳(۲۰-x)=۱۸\Rightarrow ۶x=۷۸ \quad x=۱۳$ ب- رضا چرا می‌گوید اشتباهی رخ داده است. ب : $۳x-۳(۲۰-x)=۱۵\rightarrow ۶x=۷۵\rightarrow x=\frac{۷۵}{۶}$ $\frac{۷۵}{۶}$ عدد صحیح نیست پس اشتباه شده است.	۴

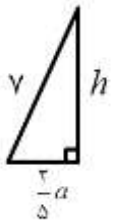
۴	در پی یک حادثه، یک سازمان امدادی ۵۰۶ بسته داروی حیاتی را به منطقه ارسال کرده است. شما به عنوان گروه توزیع دارو موظف هستید این بسته‌ها را بین واحدهای عملیاتی مستقر در سطح منطقه توزیع کنید. موفقیت این عملیات در گرو دقت شما در مدل‌سازی ریاضی و رعایت دستورالعمل‌های زیر است؛ آ. تمامی واحدهای عملیاتی باید دقیقاً تعداد برابری از بسته‌ها را دریافت کنند. ب. تعداد بسته‌های اختصاص یافته به هر واحد باید به گونه‌ای باشد که به هیچ وجه نتوان آن را به گروه‌های مساویِ کوچک‌تر (بیش از یک گروه) تقسیم کرد؛ زیرا تقسیم مجدد باعث از بین رفتن ساختار بسته‌بندی و فرایند توزیع می‌شود. پ. با توجه به توان حمل و نقل، هر واحد باید بیش از ۱۰ و کمتر از ۵۰ بسته دریافت کند. ت. به دلیل محدودیت در خودروهای اعزامی، مدیریت تأکید دارد که کمترین تعدادِ ممکن از واحدهای عملیاتی درگیر شوند. چه تعداد واحد عملیاتی انتخاب می‌کنید؟ پاسخ: هر چه تعداد واحدهای عملیاتی (n) کمتر می‌شوند، واحدها بسته‌های (x) بیشتری دریافت می‌کنند. $n.x=۵۰۶$ چون در سؤال گفته واحدها نمی‌توانند، تعداد بسته‌ها را بین واحدهای زیرمجموعه‌ای تقسیم بندی کنند، بنابراین تعداد بسته‌ها باید عددی اوّل باشد.شمارنده‌های اوّلِ ۵۰۶ که بزرگتر از ۱۰ هستند: ۱۱, ۲۳ $(۵۰۶=۲\times۱۱\times۲۳)$ بنابراین تعداد بسته‌های هر واحد باید ۲۳ باشد و $۵۰۶=۲۳\times۲۲\Rightarrow n=۲۲$ پس تعداد واحدهای عملیاتی را باید ۲۲ واحد انتخاب کرد(اگر تعداد دسته‌ها ۱۱ باشد، تعداد واحدهای عملیاتی ۴۶ می‌شود با توجه به بند "ت" قابل قبول نیست.) و در این‌صورت دستورالعمل کامل اجرا می‌شود.	۳
۵	**عدد a برابرحاصل‌ضرب ۳ عدد از مضارب متوالی ۵ است. اگر بتوان a را به صورت $a=۵^n\times۲۴$ بنویسیم، عدد a را بیابید.(مسئله چند جواب دارد)** پاسخ: مسئله دو جواب دارد. $۵(k-۱)\times۵k\times۵(k+۱)=a\Rightarrow۱۲۵(k-۱)k(k+۱)=۵^n\times۲۴$ $(k-۱)k(k+۱)=۵\times۲۴$ یا $(k-۱)k(k+۱)=۲۴$ حاصل‌ضرب سه عدد متوالی، ۲ و ۳ و ۴ برابر ۲۴ می‌شود و حاصل‌ضرب سه عدد متوالی ۴ و ۵ و ۶ برابر ۱۲۰ می‌شود. در این صورت $a=۱۲۵\times۲۴=۳۰۰۰$ یا $a=۱۲۵\times۱۲۰=۱۵۰۰۰$	۴
۶	علی در دورهٔ اول دبیرستان و خواهرش مقطع ابتدایی درس می‌خوانند. حاصل‌ضرب سن‌های خانواده ۴ نفره او برابر ۱۹۷۱۲۰ است. میانگین سن پدر و مادر او ۳ برابر سن علی است، سن اعضای خانوادهٔ علی را حساب کنید. پاسخ: $۱۹۷۱۲۰=۲^۹\times۵\times۷\times۱۱$ $۱۲\geq$ سن خواهر علی ≥۶ $۱۵\geq$ سن علی ≥۱۲ با توجه به عامل‌ها، سن علی فقط می‌تواند ۱۴ سال باشد و سن خواهرش ۸ یا ۱۰ یا ۱۱ می‌تواند باشد مجموع سن پدر و مادر علی $۸۴=۲\times۴۲\Rightarrow$ میانگین سن پدر و مادر علی $۳\times۱۴=۴۲$ با آزمون و خطا و بررسی کردن سن خواهر علی ۸ سال می‌تواند باشد. $۱۹۷۱۲۰=۱۴\times۸\times۴۰\times۴۴$ در این صورت سن مادر علی ۴۰ و سن پدر علی ۴۴ است.	۳

۷ در شکل روبرو و طول تمام اضلاع، اعدادی طبیعی هستند و مساحت شکل برابر $۶۰+۲۱\sqrt{۵}$ می‌باشد. مقدارهای a و b را تعیین کنید.



پاسخ: مساحت ذوزنقه + مساحت مستطیل = مساحت شکل





$$\text{مساحت شکل} = ab + \frac{a+\frac{۹}{۵}a}{۲}\times h$$

$$h^۲ = ۴۹ - \left(\frac{۲}{۵}a\right)^۲ \qquad h = \sqrt{۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲}$$

$$۶۰+۲۱\sqrt{۵} = ab + \frac{۷}{۵}a\sqrt{۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲}$$

$۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲$ باید مضرب ۵ باشد و ضریب عدد ۵ باید مربع کامل باشد. پس $۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲$ باید برابر ۱×۵ یا ۴×۵ یا ۹×۵ یا...

باشد و چون این اعداد، کوچکتر از ۴۸ است، داریم:

اگر $۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲ = ۱\times۵ \Rightarrow ۴۹-۵ = \frac{۴}{۲۵}a^۲ \Rightarrow ۴۴ = \frac{۴}{۲۵}a^۲$ × a عدد طبیعی نیست

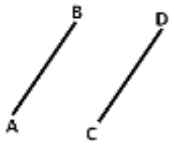
اگر $۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲ = ۴\times۵ \Rightarrow ۴۹-۲۰ = \frac{۴}{۲۵}a^۲ \Rightarrow ۲۹ = \frac{۴}{۲۵}a^۲$ × a عدد طبیعی نیست

اگر $۴۹-\frac{۴}{۲۵}a^۲ = ۹\times۵ \Rightarrow ۴۹-۴۵ = \frac{۴}{۲۵}a^۲ \Rightarrow ۴ = \frac{۴}{۲۵}a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$

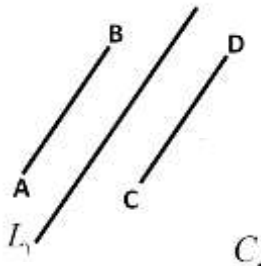
$$ab = ۶۰ \overset{a=۵}{\Rightarrow} b = ۱۲ \Rightarrow \text{مساحت شکل} = ۵\times۱۲ + \frac{۷}{۵}\times۵\times\sqrt{۴۹-\frac{۴}{۵}\times۵^۲} = ۶۰+۷\sqrt{۴۹-۴} = ۶۰+۷\sqrt{۴۵} = ۶۰+۲۱\sqrt{۵}$$

۵

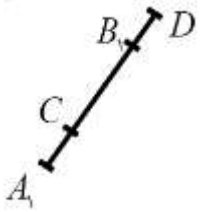
۸ در شکل زیر پاره خطهای AB و CD مساوی و موازی هستند.
توضیح دهید چگونه می‌توان

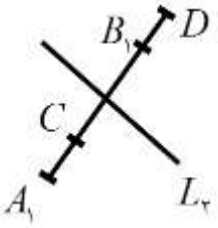


الف: با دو تقارن محوری پاره خط AB را روی پاره خط CD قرار داد.

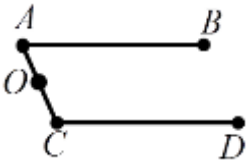


پاسخ: خط L_1 را چنان رسم می‌کنیم که فاصلهٔ نقاط A و C تا خط L_1 یکسان باشد.
سپس قرینهٔ AB را نسبت خط L_1 رسم می‌کنیم در این صورت A_1B_1 (قرینهٔ AB) است.
در اینصورت قرینهٔ AB و CD در یک امتداد قرار می‌گیرند.
از این‌که پاره خطهای A_1B_1 و CD مساویند. پس $A_1C = B_1D$.
خط L_2 عمود منصف CB_1 (یا A_1D) را رسم می‌کنیم.
اگر قرینهٔ A_1B_1 را نسبت به L_2 رسم کنیم A_1 روی D و B_1 روی C قرار می‌گیرد.
بدین ترتیب AB روی CD منطبق می‌شود.

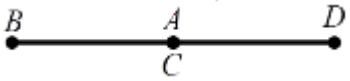




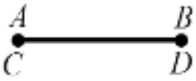
ب: با دو دوران،پاره خط AB را روی CD چنان منطبق کرد، به طوری‌که A روی C و B روی D قرار گیرد.



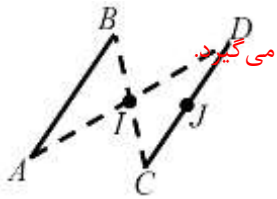
پاسخ:
رووش اول:
A را به C وصل می‌کنیم نقطه وسط خط AC را O می‌نامیم AB را ۱۸۰درجه حول نقطه O دوران می‌دهیم،داریم:

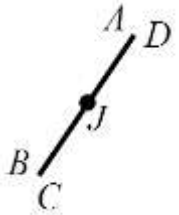


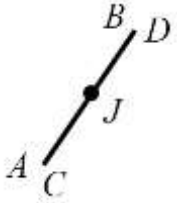
بار دیگر پاره خط AB را حول نقطه C، ۱۸۰ درجه دوران می‌دهیم داریم.



روش دوم: نقطهٔ برخورد AD و BC را I ، و نقطهٔ وسط CD را J می‌نامیم.
AB را ۱۸۰درجه حول نقطه I دوران می دهیم، A روی D و B روی C منطبق می‌شود.
پاره خط AB را ۱۸۰ درجه حول نقطهٔ J دوران می‌دهیم در این‌صورت A روی C و B روی D قرار می‌گیرد.







۵

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید