مرحله سوم پنجمین دوره مسابقه متر (بخش کتبی)

پایه ششم

تاریخ : ۱۴۰۵/۰۵/۲ وقت : ۷۵ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- **هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.**

۲- **اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.**

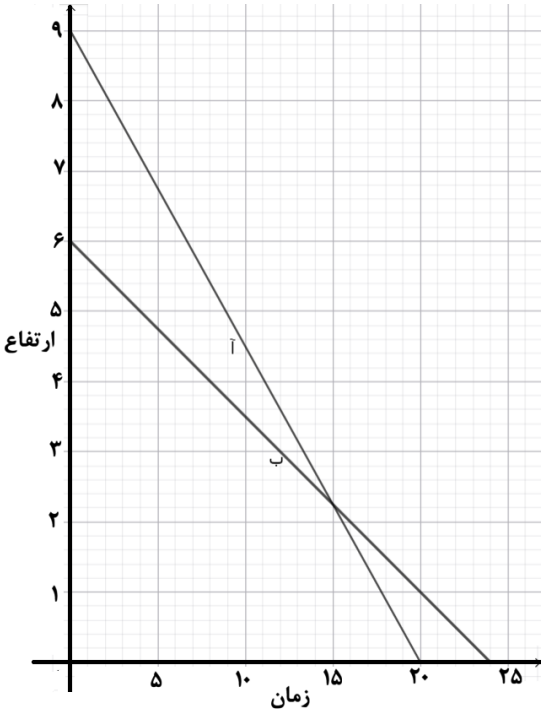
۳- **استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

٤- **این آزمون شامل ۶ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.**

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

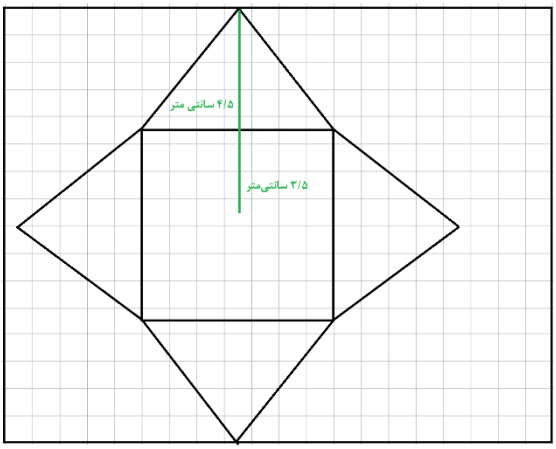
ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	در یک جعبه، ۶ مهره آبی، ۱۳ مهره نارنجی و تعدادی مهره بنفش وجود دارد. امیر ادعا می‌کند اگر از این جعبه ۲۰ مهره به صورت تصادفی و بدون نگاه کردن برداریم، در هر حالت ممکن، حتماً از هر سه رنگ حداقل یک مهره انتخاب شده است. حداکثر تعداد مهره‌های بنفش را پیدا کنید. پاسخ: بیشترین تعداد ممکن برای مهره‌های بنفش ۶ تا است. زیرا اگر ۷ مهره بنفش داشته باشیم ممکن است در یک حالت خاص از برداشتن ۲۰ مهره، ۱۳ مهره نارنجی و ۷ مهره بنفش برداشته باشیم که در این صورت مهره آبی نداریم. در این صورت ادعای امیر نادرست می‌شود. اما اگر ۶ مهره بنفش داشته باشیم در هر حالت که ۲۰ مهره انتخاب کنیم حتما از هر سه رنگ، مهره خواهیم داشت.	۴ .
۲	مطابق شکل روبه‌رو با استفاده از تعدادی چوب کبریت به ضلع ۴ سانتی‌متر می‌خواهیم مستطیلی به طول ۱ متر و عرض ۰.۴۸ متر را با چوب کبریت‌های (هم‌اندازه) مربع‌بندی کنیم. چند چوب کبریت دیگر برای کامل کردن مربع‌بندی نیاز است؟  پاسخ: در طول ۲۵ چوب کبریت و در عرض ۱۲ چوب کبریت قرار می‌گیرد. اگر کل مستطیل با چوب کبریت‌ها مربع‌بندی شود، مستطیل دارای ۱۳ ردیف چوب کبریت افقی است که در هر ردیف ۲۵ چوب کبریت قرار دارد و دارای ۲۶ ستون از چوب‌کبریت‌های عمودی است که هر ستون دارای ۱۲ چوب کبریت است. پس برای این کار به $۱۳ \times ۲۵ + ۲۶ \times ۱۲ = ۳۲۵ + ۳۱۲ = ۶۳۷$ چوب کبریت نیاز است. اما در حال حاضر ۲۵ چوب کبریت استفاده شده است. پس تعداد چوب کبریت‌های باقی مانده مورد نیاز برابر است با $۶۳۷ - ۲۵ = ۶۱۲$	۴

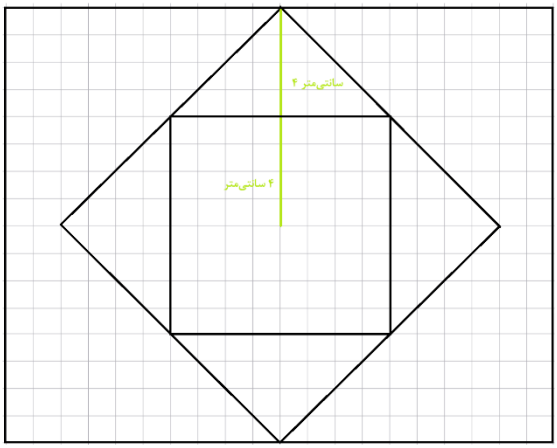
۳	شکل زیر نمودار تغییرات ارتفاع (سانتی‌متر) و زمان (دقیقه) را برای دو شمع **آ** و **ب** که هم‌جنس هستند و همزمان روشن شده‌اند، نشان می‌دهد.  الف) ارتفاع این دو شمع در ابتدا چقدر بوده است؟ (۱ نمره) پاسخ: شمع آ، ۹ سانتی‌متر و شمع ب، ۶ سانتی‌متر ب) بعد از چند دقیقه ارتفاع دو شمع برابر می‌شود؟ در این زمان ارتفاع شمع‌ها چقدر است؟ (۱ نمره) پاسخ: بعد از ۱۵ دقیقه ارتفاع دو شمع تقریبا ۲.۲ سانتی‌متر است. ت) هر دو شمع به صورت مکعب مستطیل هستند که سطح زیرین هر دو به شکل مربع است. آیا مساحت‌های سطح زیرین این دو شمع می‌تواند برابر باشد؟ (دلیل خود را به طور کامل توضیح دهید) (۱ نمره) پاسخ: خیر، باتوجه به آنکه جنس هر دو شمع یکسان است اگر هر دو مساحت زیرین یکسانی نیز داشتند باید شمع آ که بلندتر است دیرتر تمام می‌شد (به هر استدلال درست دیگر نیز، امتیاز داده شود). ث) اگر مساحت سطح زیرین شمع آ، ۵ سانتی‌متر مربع باشد، مساحت سطح زیرین شمع ب را به دست آورید. (۳ نمره) پاسخ: در این صورت حجم شمع آ برابر است با ۴۵ سانتی‌متر مکعب. این حجم از شمع در ۲۰ دقیقه سوخته شده است. پس با تشکیل یک جدول تناسب حجم شمع ب که در ۲۴ دقیقه سوخته است، به دست می‌آید: $\frac{۲۴ \times ۴۵}{۲۰} = ۵۴$ سانتی متر مکعب از تقسیم حجم شمع ب بر ارتفاعش مساحت کف شمع ب به دست می‌آید: $۵۴ \div ۶ = ۹$ سانتی متر مربع	۶
۴	آرزو می‌خواهد با یک مقوا به شکل مستطیل به ابعاد ۲۰ و ۱۶ سانتی‌متر، نقشه گسترده یک هرم با یک وجه مربعی و وجه‌های دیگر به شکل مثلث متساوی‌الساقین رسم کند تا با آن یک هرم درست کند. نقشه گسترده هرم را در مستطیل زیر بکشید به طوری که ضلع وجه مربعی هرم بیشترین مقدار ممکن صحیح را داشته باشد. توجه داشته باشید که نقشه گسترده هرم به صورت یکپارچه باشد.	۴



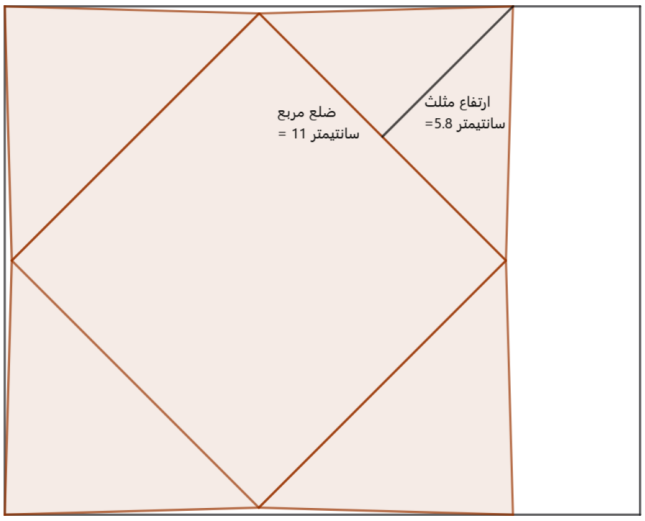
پاسخ: شرط اساسی برای آن که هرم تشکیل شود آن است که ارتفاع مثلث‌ها از نصف ضلع مربع قاعده (یعنی همان فاصله مرکز مربع تا ضلع مربع) بزرگتر باشد. در این مسئله دو پاسخ درنظر گرفته می‌شود که پاسخ اول تا حدودی صحیح و پاسخ دوم کاملا صحیح است.

پاسخ اول: اگر بخواهیم اضلاع قاعده هرم موازی با اضلاع مقوا باشد. در این صورت ضلع قاعده هرم باید حداکثر ۷ سانتی‌متر باشد تا بتوان با آن هرم تشکیل داد؛ زیرا اگر ضلع هرم ۸ سانتی‌متر باشد (مانند شکل زیر سمت چپ)، هرم تشکیل نمی‌شود.





پاسخ دوم: اگر اضلاع مربع قاعده موازی با اضلاع مقوا نباشد. دراین صورت می‌توان مربعی به ضلع ۱۱ داشت.



توجه: بارم پیشنهادی:

برای پاسخ از نوع اول: برای ضلع مربع برابر با ۷ سانتی‌متر، ۲ نمره.

برای پاسخ از نوع دوم: برای ضلع مربع ۸ سانتی‌متر، ۲.۵ نمره، برای ضلع مربع ۹ سانتی‌متر، ۳ نمره، برای ضلع مربع ۱۰ سانتی‌متر، ۳.۵ نمره، برای ضلع مربع ۱۱ سانتی‌متر، ۴ نمره و برای ضلع مربع بزرگتر از ۷ سانتی‌متر بدون توجه به این که اندازه ضلع صحیح است یا نه، ۲ نمره.

---

۵ در یک چاپخانه، سه دستگاه با نام‌های آلفا، بتا و گاما برای چاپ ۱۰ هزار نسخه از یک روزنامه استفاده می‌شوند. دستگاه آلفا می‌تواند این کار را به تنهایی در ۶ ساعت، دستگاه بتا در ۱۰ ساعت و دستگاه گاما در ۱۲ ساعت انجام دهد. هر سه دستگاه ساعت ۹ صبح هم‌زمان شروع به کار می‌کنند، اما دستگاه آلفا پس از یک ساعت کار (ساعت ۱۰ صبح) خاموش می‌شود. تعیین کنید این کار در چه زمانی به پایان می‌رسد. ۵

پاسخ:

هر یک از دستگاه‌ها در هر ساعت می‌توانند کسری از کار را انجام دهند:

دستگاه آلفا $\frac{۱}{۶}$ از کار، دستگاه بتا $\frac{۱}{۱۰}$ از کار و دستگاه آلفا $\frac{۱}{۱۲}$ از کار.

پس این سه دستگاه بعد از یک ساعت می‌توانند، $\frac{۱۰}{۶۰}+\frac{۶}{۶۰}+\frac{۵}{۶۰}=\frac{۲۱}{۶۰}$ از کار را انجام دهند.

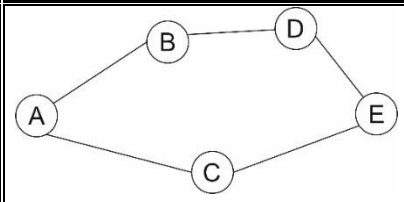
کسر باقی مانده از کار برای آن که دو دستگاه بتا و گاما با هم آن را تمام کنند برابر است با: $۱-\frac{۲۱}{۶۰}=\frac{۳۹}{۶۰}$.

این دو دستگاه در هر یک ساعت می‌توانند با هم $\frac{۱۰}{۱۲۰}+\frac{۱۲}{۱۲۰}=\frac{۲۲}{۱۲۰}=\frac{۱۱}{۶۰}$ از کار را انجام دهند. پس برای آن که کار تمام شود این دو دستگاه باید $\frac{۳۹}{۶۰}\div\frac{۱۱}{۶۰}=\frac{۳۹}{۱۱}$ ساعت کار کنند که تقریبا برابر است با ۳ ساعت و ۳۲ دقیقه و ۴۳ ثانیه.

بنابراین کار در ساعت ۱۳:۳۲:۴۳ تمام می‌شود.

---

۶ رضا می‌خواهد از شهر A به شهر E برود او مسیرهای شکل را می‌تواند انتخاب کند مشخصات مسیرها به صورت زیر است: ۵



- مسیر A به B، ۲۰۰ کیلومتر، مسیری معمولی که در آن اتومبیل رضا به ازای هر ۱۲ کیلومتر یک لیتر بنزین مصرف می‌کند.
- مسیر B به D، ۴۸ کیلومتر مسیری با جاده مطلوب و ترافیک کم که اتومبیل رضا به ازای هر ۱۲ کیلومتر، نسبت به مسیر قبلی ۱۰ درصد کمتر بنزین مصرف می‌کند.
- مسیر D به E، ۱۰۰ کیلومتر با ترافیک بالا که اتومبیل رضا به ازای هر ۱۲ کیلومتر، نسبت به مسیر A به B، ۲۰ درصد بیشتر بنزین مصرف می‌کند.
- مسیر A به C، ۱۳۰ کیلومتر، مسیری هموار که اتومبیل رضا به ازای هر ۱۲ کیلومتر، نسبت به مسیر A به B، ۱۰ درصد کمتر بنزین مصرف می‌کند.
- مسیر C به E، ۲۴۰ کیلومتر مسیر معمولی که اتومبیل رضا به ازای هر ۱۲ کیلومتر یک لیتر بنزین مصرف می‌کند.

الف) دو مسیر موجود از A به E را از نظر مسافت بر حسب کیلومتر مقایسه کنید. (۱ نمره)

پاسخ: مسیر اول $A \to B \to D \to E$

در این مسیر مسافتی که باید طی شود برابر است با:

$$۲۰۰ + ۴۸ + ۱۰۰ = ۳۴۸$$

مسیر دوم $A \to C \to E$

در این مسیر مسافتی که باید طی شود برابر است با:

$$۱۳۰ + ۲۴۰ = ۳۷۰$$

بنابراین مسیر کوتاه‌تر است.

ب) اگر اتومبیل رضا ۳۰ لیتر بنزین داشته باشد آیا می‌تواند با همین مقدار بنزین به مقصد برسد؟ دلیل خود را به طور کامل توضیح دهید (محاسبات را تا دو رقم اعشار انجام دهید). (۴ نمره)

پاسخ: مسیر اول $A \to B \to D \to E$

مصرف بنزین در این مسیر برابر است با:

$$۲۰۰ \times \frac{۱}{۱۲} + ۴۸ \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۰} + ۱۰۰ \times \frac{۱}{۱۲} \times ۱.۲ = ۳۰.۲۶$$

مسیر دوم $A \to C \to E$

$$۱۳۰ \times \frac{۱}{۱۲} \times \frac{۹}{۱۰} + ۲۴۰ \times \frac{۱}{۱۲} = ۲۹.۷۵$$

بنابراین او فقط می‌تواند از مسیر دوم به مقصد برود.

دانش آموزان عزیز، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید.