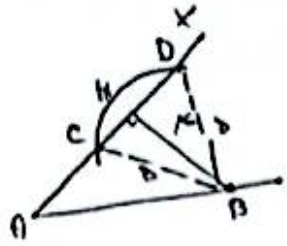
پاسخ سوالات مرحله دوم سی‌امین دوره المپیاد ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۴

۱)



$CH^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow CH = 3$

$\left.\begin{array}{l} \text{محیط } ABD = AB + BD + AD \\ \text{محیط } ABC = AB + BC + AC \end{array}\right\} \Rightarrow$ محیط ABD از محیط ABC به اندازه AD بزرگتر است.

پس محیط ABC برابر $21 = 7 - 28$

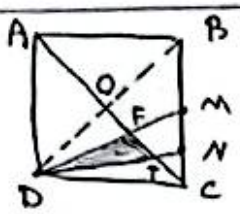
۲)

$f(x) = \frac{x-9}{x-1}$ ، $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2-bx+c}$

چون با برابر شدن دو ضابطه $(x-1)^2 = x^2-bx+c$ پس $b=2$ و $c=1$ و ضابطه $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

و داریم $a=-1$ و بنابراین: $a+b+c=2$

۳-



$\triangle BCD$: میانه‌های DM, CO $\Rightarrow CF = \frac{2}{3}CO = \frac{1}{3}AC$

$\Rightarrow S(DFC) = \frac{1}{3}S(ADC) = \frac{1}{6}S$ (I)

$\triangle TCN \sim \triangle ADT \rightarrow \frac{CT}{AT} = \frac{NC}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{CT}{AC} = \frac{1}{5}$

$\rightarrow S(DTC) = \frac{1}{5}S(ADC) = \frac{1}{10}S$ (II) از I و II $\Rightarrow S(DFT) = \frac{1}{6}S - \frac{1}{10}S = \frac{1}{15}S$

۴- فرض کنیم $x_1 = 25$ و $x_2 = 5b$ پس: $P = x_1x_2 = 100b = 80 \Rightarrow ab = 8$

$K = x_1 + x_2 = 25 + 5b$

$(2a)(5b) = 80$

وقتی حاصل ضرب چند عدد مثبت ثابت می‌ماند که برابر باشند پس $5b = 2a = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\min(K) = 25 + 4\sqrt{5}$

روش (۲):

$K = 2a + 5b = 2a + \frac{40}{a} \Rightarrow aK = 2a^2 + 40$

$\Rightarrow 2a^2 - aK + 40 = 0$ ، $\Delta = K^2 - 320$ ، $a = \frac{K \pm \sqrt{K^2-320}}{4}$

برای اینکه a وجود داشته باشد باید $\Delta \geq 0$ پس $K^2 - 320 \geq 0$ یعنی $K \geq 8\sqrt{5}$

۵-

$\frac{5}{2-\log_2^x} \geq \log_2^x - 2$ $(\log_2^x = y)$ $\Rightarrow \frac{5}{2-y} - y + 4 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{5-2y+y^2+8-4y}{2-y} \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2-6y+13}{2-y} \geq 0$ (چون $y^2-6y+13 > 0$ است)

$\Rightarrow y < 2 \rightarrow \log_2^x < 2 \Rightarrow \boxed{x < 4}$

Scanned with CamScanner

سوال ۶) فرض کنیم سه عدد اول ۷ واحدی دنباله‌ی حسابی با این قدر نسبت x باشند داریم:

$$x = (\tau+\delta)(\tau-\delta) \quad , \quad \tau x = (\nu+\delta)(\tau-\delta) \quad , \quad \tau x = (\nu+\nu)(\tau-\nu)$$

$$\delta \cdot \nu - \tau \Rightarrow \begin{cases} \tau x > \nu \Rightarrow \nu\delta - \tau\delta \\ \tau x \cdot \nu \cdot \tau\delta \end{cases} \Rightarrow \tau x = (\nu+\nu)(\tau-\nu) \Rightarrow \tau x = \nu\delta - \tau\nu = \nu\cdot$$

پاسخ نهایی آخر داریم: $\boxed{\tau\cdot\tau\cdot}$

سوال ۷) $y = \frac{(x+\tau)(x-\nu)}{\sqrt{x+\nu}+\tau} \times \frac{\sqrt{x+\nu}-\tau}{\sqrt{x+\nu}-\tau} \Rightarrow y = (x+\tau)(\sqrt{x+\nu}-\tau)$

اگر $x \to \nu^+$ باشد داریم $f(x) \to f(\nu^+)$ که این حد یک عدد مثبت است و لذا جواب دارد.

آخرین رقم $z = \sqrt{x+\nu} = \sqrt{\nu\tau\tau\nu} = \tau^2 - \nu^\circ$ چنین x داریم:

$$y = (\tau^2+\tau)(\tau-\tau) = \tau^3 - \tau\tau^2 + \tau\tau - \nu = (\tau-\nu)^3 \Rightarrow y+\nu = (\tau-\nu)^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{y+\nu} = \tau - \nu \Rightarrow \sqrt[4]{x+\nu+\nu} = \tau - \nu \Rightarrow \sqrt[4]{x+\nu+\nu} = \tau - \nu \Rightarrow x+\nu = (\tau-\nu)^4 \Rightarrow x = \tau\nu$$

سوال ۸) آن عدد $abcd$ را به ترتیب با اعداد ۱ و ۳ تفاضل کنیم. حاصل جمع این اعداد $(\tau\tau)(\tau)+(\tau)(\tau)+(\nu)(\tau)+(\nu)(\tau)$ تقسیم بر دو زوج است

باقی‌مانده از تقسیم شدن زوج بر ۳ همان باقی‌مانده‌ی تقسیم خود عدد بر ۳ است. پس آخرین عدد مانده باید زوج باشد که تنها ۲ است.

سوال ۹) اگر فرض کنیم $z = \frac{x+\delta}{\tau} + x$ یعنی $x+\tau = z$ داریم: $(z-\tau)^4 + (z+\tau)^4 = \lambda\tau$

$$\Rightarrow (z^4 - \tau z^3 + \tau z^2 - \tau z + \nu) + (z^4 + \tau z^3 + \tau z^2 + \tau z + \nu) = \lambda\tau$$

$$\Rightarrow z^4 + \tau z^2 - \nu = \tau \Rightarrow z^4 + \tau z^2 - \tau\delta = \cdot \Rightarrow (z^2-\nu)(z^2+\tau\delta) = \cdot \Rightarrow z = \pm\nu$$

پس $x = -\tau$ یا $x = -\xi$

سوال ۱۰) فرض کنیم نقطه $P(a, \tau\nu)$ روی خط D باشد

$$P(a,\tau\nu), A(\nu,\nu) \Rightarrow AP: y-\nu = \frac{\tau\nu-\nu}{a-\nu}(x-\nu)$$

$$y = \cdot \Rightarrow x-\nu = \frac{-\tau(a-\nu)}{\tau\nu-\nu} \Rightarrow x = \frac{-\tau\nu+\tau}{\tau\nu-\nu} = \frac{\tau}{\tau\nu-\nu} \Rightarrow E\left(\frac{\tau}{\tau\nu-\nu}, \cdot\right)$$

$$P(a,\tau\nu), B(-\tau,\xi) \Rightarrow BP: y-\xi = \frac{\tau\nu-\xi}{a+\tau}(x+\tau)$$

$$x = \cdot \Rightarrow y = \frac{\tau\nu-\tau\tau}{a+\tau} + \xi = \frac{\tau\nu}{a+\tau} \Rightarrow F\left(\cdot, \frac{\tau\nu}{a+\tau}\right)$$

معادله خط EF: $y = \frac{\tau\nu}{a+\tau}(x - \frac{\tau}{\tau\nu-\nu}) \Rightarrow (a+\tau)y = \tau\nu(\tau\nu-\nu)x + \tau\nu$

این خط از نقطه $H(\tau, \tau\nu)$ می‌گذرد $\Rightarrow a(\tau\nu) + \tau\nu = \tau\nu(\tau\nu-\nu)\tau + \tau\nu \Rightarrow a = \tau\nu$

پاسخ نهایی $\Rightarrow$ فاصله نقطه $(\frac{\tau}{\tau\nu-\nu}, \cdot)$ تا خط $y = \tau\nu$ برابر $\frac{\tau\nu}{\nu\nu}$

Scanned with CamScanner

۱-

۲-

۳-

۴-

۵-

۶- چه در دقت است . اگر حرف ه را با عدد یک و حرف ط را با ۲ و حرف ج را با ۳ نظیر کنیم مجموع اعداد نوشته شده روی تخته می شود ۲۷ = ۲×۵+۲×۴+۱×۱ که عددی زوج است . به سادگی می توان دید که با انجام هر کار مجموع اعداد زوج روی تخته پس از آخرین مرحله باید زوج باشد در حالی که یک حرف ط است یعنی عدد ۲ است یعنی باقی ماند

۷-

۸- خط گذرا از $(0,25)$ و موازی خط گذرا از $(0,c)$ محور yها را در $c=25$ قطع می‌کند. لذا معادله خطی می‌شود:

$y=25x+25$ یا $y=25(x+1)$ که محور xها را در $(-1,0)$ قطع می‌کند:

$$0=a(-1)^2+b(-1)+c \Rightarrow a+c=b \xrightarrow{c=25} b=25$$

$$y=ax^2+bx+c \to y=ax^2+25x+25=a(x^2+3x+2)=0$$

$$x\neq 0 \to x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=-2$$

۹- به ازای هر ۴ نقطه روی دایره مانند A,B,C,D یک جفت پاره‌خط راست که یکدیگر را قطع می‌کنند (AC, BD) و برعکس برای هر جفت پاره‌خط که یکدیگر را قطع کنند $15=\binom{6}{4}$ حالت وجود دارد. هم چنین هر ۴ نقطه و جفت پاره‌خط (شکل ۳ یا ۴ ضلعی) مشخص می‌کنند و برعکس هر جفت پاره‌خط غیر متقاطع اضلاع یک چهارضلعی هستند پس تعداد جفت پاره‌خط‌هایی که متقاطع هستند $30=\binom{6}{4}2$.

۱۵ جفت پاره‌خط رسم شده از جفت اول دورنی دایره متقاطع هستند. و برای هر $5=\binom{5}{2}$ جفت پاره‌خط که از آن می‌گذرد یک متقاطع هستند پس جواب $30+75=105$ می‌شود.

۱۰- عددهای مذکور به شکل زیر هستند:

$$a^5,\ a^5+a^4,\ a^5+a^4+a^3,\ a^5+a^4+a^3+a^2,\ a^5+a^4+a^3+a^2+a,\ a^5+a^4+a^3+a^2+a+1,$$
$$a^4,\ a^4+a^3,\ a^4+a^3+a^2,\ a^4+a^3+a^2+a,\ a^4+a^3+a^2+a+1,$$
$$a^3,\ a^3+a^2,\ a^3+a^2+a,\ a^3+a^2+a+1,$$
$$a^2,\ a^2+a,\ a^2+a+1,$$
$$a,\ a+1,$$
$$1$$

آنها به همین ترتیب ادامه دارند. ۱۲ عدد با a^5، ۳۲ عدد با a^6 شروع می‌شود که جمع تعداد آنها $12+32=44$ است لذا عدد a^6 شروع می‌شود با a^6+a^5 شروع می‌شود با $a^6+a^5+a^4$ و ... عدد نوشتن با $a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1$ شروع می‌شود.

عدد نوشتن:

$$a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a+1,\ \ldots,\ a^6+a^5,\ a^6$$

$$44+63=91 \to 32+63=95 \text{ عدد}$$

پس ۹۵ عدد آخر که نوشتیم به عدد صفر می‌رسیم.

$$a^4+a^3+a^2+a+1,\ a^3+a^2+a+1,\ a^2+a+1,\ a+1,\ 1$$

لذا مجموع برابر است

$$a^4+a^3+a^2+a+1=15,775$$

تنها ارقام 5 و 7 تاثیر نیستند خیر

Scanned with CamScanner