توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

۱-هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز سه شنبه ۱۴ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند.

۲- مدیران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز چهارشنبه ۱۵مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند.

۳-تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود.

۴-دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

مشخصات اعضای تیم
۱-
۲-
۳-

نام خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	دو سهمی غیر منطبق $f(x)=x^2+ax+b$ و $g(x)=x^2+cx+d$ داده شده اند. اگر $f(1)+f(404)=g(1)+g(404)$ ، معادله $f(x)=g(x)$ را حل کنید. پاسخ : $1+a+b+1+404a+b=1+c+d+1+404c+d \Rightarrow 405a+2b=405c+2d \Rightarrow 405(a-c)=2(d-b) \Rightarrow \frac{a-c}{d-b}=\frac{2}{405}$ توضیح : $d\neq b$ زیرا اگر $d=b$ آنگاه $a=c$ (و برعکس) . و بنابراین دو سهمی منطبق می شوند که خلاف فرض است. بنابراین $f(x)=g(x) \Rightarrow x^2+ax+b=x^2+cx+d \Rightarrow (a-c)x=d-b \Rightarrow x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{405}{2}$	۳
۲	اضلاع مثلثی دنباله حسابی تشکیل می دهند و ضلع متوسط آن برابر ۱۰سانتیمتر است. اگر مساحت این مثلث $\frac{3}{5}$ مساحت مثلث متساوی الاضلاعی باشد که با آن محیط برابر دارد، طول بزرگترین ارتفاع مثلث را به دست آورید پاسخ : اضلاع مثلث را $10-d\ ,10\ ,10+d$ می گیریم. پس محیط آن ۳۰ است. حال با استفاده از رابطه هرون داریم $s=\sqrt{15\times 5\times (5+d)\times (5-d)}$ درنتیجه $\sqrt{15\times 5\times (5+d)\times (5-d)}=\frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 100\right) \Rightarrow 75(25-d^2)=675 \Rightarrow$ $d^2=16 \Rightarrow d=4$	۴

	پس اضلاع مثلث ۶ و ۱۰ و ۱۴ می باشند. بزرگترین ارتفاع نظیر ضلع ۶ است و برابر است با $$h=\frac{2s}{6}=\frac{2\sqrt{75\times 9\times 1}}{6}=\frac{30\sqrt{3}}{6}=5\sqrt{3}$$	
۳	سه نفر به ترتیب تاسی را می اندازند. اگر نفر اول ۱ یا ۲ یا ۳بیاورد، بازی را می برد و اگر نفر دوم ۴ یا ۵ بیاورد، می برد واگر نفر سوم ۶ بیاورد سومی می برد. و دوباره به همین ترتیب ادامه می دهند و اگر کسی ببرد بازی تمام می شود. احتمال برد نفر دوم چقدر است؟ پاسخ : پیشامد برد نفر اول و دوم و سوم را به ترتیب A, B, C می نامیم. احتمال اینکه نفر دوم در دور اول ببرد برابر است با $P(B_1)=P(A'\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ همچنین احتمال این که نفر دوم در دور دوم برنده شود برابر است با $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}\times\frac{1}{6}$ و به طور کلی احتمال این که نفر دوم در دور n ام ببرد برابر است با $\left(\frac{5}{18}\right)^{i-1}\times\frac{1}{6}$ لذا احتمال برد نفر دوم برابر است با $$P(B)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{18}\right)^{i-1}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{\frac{13}{18}}=\frac{3}{13}$$	۵
۴	**-آراز و بردیا یک بازی به صورت زیر انجام میدند ابتدا آراز عدد ۱ یا ۲ را انتخاب می کند، سپس بردیا عدد ۱ یا ۲ را انتخاب می کند. سپس این کا را ۱۴ بار دیگر انجام می دهند(روی هم ۱۵ بار).در انتها حاصل جمع ۳۰ عدد انتخاب شده توسط هر دونفر را به دست می آورند. اگراین مجموع مضرب ۶ باشد بردیا برنده است و در غیر این صورت آراز برنده است. آیا بردیا می تواند طوری بازی کند که حتما برنده شود** **پاسخ :** خیر. آراز می تواند طوری بازی کند که بردیا هیچ راهی برای برد نداشته باشد. برای اثبات این موضوع آخرین حرکت آراز و بردیا را در نظر بگیرید. بردیا در آخرین حرکت فقط وقتی می تواند برنده شود که مجموع ۲۹ عدد انتخاب شده $6k+4$ یا $6k+5$ باشد. اما در آخرین حرکت آراز اگر مجموع ۲۸ عدد انتخاب شده $6k+3$ نباشد، می تواند انتخابی انجام دهد که مجوع ۲۹ عدد نه به صورت $6k+4$ باشد و نه به صورت $6k+5$. پس بردیا برای برد باید طوری بازی کند که در حرکت چهاردهم خودش مجموع اعدا انتخاب شده $6k+3$ شود. حال به همین صورت اگر به عقب برگردیم می بینیم که بردا در صورتی می تواند برنده شود که مجموع دوعدد انتخابی در دور اول $6k$ شود که امکان پذیر نیست.	۵

۵	نشان دهید بی نهایت عدد گویا وجود دارد که حاصل عبارت $\sqrt{2x^2-111x+1404}$ عددی گویا شود.آیا ممکن است حاصل این عبارت عددی صحیح شود؟ پاسخ : عبارت داده شده را به شکل $\sqrt{(2x-39)(x-36)}=\sqrt{(x-36)^2\times\frac{2x-39}{x-36}}$ می نویسیم. حال اگر عبارت مربع یک عدد گویا باشد حاصل رادیکال یک عدد گویاست. بنابراین داریم $$\frac{2x-39}{x-36}=y^2 \Rightarrow y^2x-36y^2=2x-39 \Rightarrow x=\frac{36y^2-39}{y^2-2}$$ از رابطه بالا نتیجه می شود که به ازای هر عدد گویای y عدد گویای x به دست می آید که به ازای آن حاصل رادیکال برابر است با $\left\|(x-36)\times y^2\right\|$ که یک عدد گویاست. حال اگر عدد صحیح x را طوری بیابیم که $2x-39$ بر $x-36$ بخش پذیر باشد و مقدار آن یک مربع کامل شود،حاصل رادیکال عدد صحیح می شود. اما $$\frac{2x-39}{x-36}=\frac{2(x-36)+33}{x-36}=2+\frac{33}{x-36}$$ و لذا اگر $x-36$ یک مقسوم علیه ۳۳ باشد حاصل رادیکال ممکن است صحیح شود که برای ۳ این اتفاق می افتد. پس پاسخ قسمت دوم سوال مثبت می باشد.	۶
۶	**مجموعه** مجموعه $A=\{1و2و3و\dots و20\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $k<20$ یک عدد طبیعی باشد. می خواهیم تعدادی زیر مجموعه k عضوی از A انتخاب کنیم که اشتراک هردوی آنها غیر تهی باشد الف) نشان دهید همواره می توان $\binom{19}{k-1}$ زیر مجموعه با خاصیت گفته شده پیدا کرد. ب)اگر $k>10$ نشان دهید تعداد بیشتری از زیر مجموعه ها با خاصیت گفته شده وجود دارد پ) اگر $k=10$ نشان دهید می توان $\binom{19}{9}$ زیر مجموعه از A با خاصیت گفته شده پیدا کرد به طوریکه اشتراک همه آنها نیز تهی باشد. پاسخ : الف) همه زیر مجموعه های k عضوی که شامل یک عضو مشخص مثلا ۱ باشند درستی حکم الف را نشان می دهد ب)اگر $k>10$ آنگاه با ازای هر دو زیر مجموعه k عضوی مانند $B\,,C$ داریم $$|C\cup B|\leq 20 \text{ و } |C|+|B|>20=|C\cap B|+|C\cup B|$$ از دورابطه بالا نتیجI می شود که $|C\cap B|>0$ بنابراین می توان همه زیرمجموعه های k عضوی را در نظر گرفت.	۷

پ) ابتدا همه زیر مجموعه های ۱۰ عضوی A که شامل ۱ هستند را انتخاب می کنیم. تعداد این زیر مجموعه ها برابر $\binom{19}{10}=\binom{19}{9}$ است و اشترا هر دوتای آنها غیر تهی است، اما اشتراک همه آنها تهی نیست چون ۱ عضو همه آنها است. اکنون به جای مجموعه $\{1و2و3و..و10\}$ مجموعه $\{11و12و13و..و20\}$ را در نظر می گیریم و نشان می دهیم که این مجموعه ها همچنان خواص قبل را دارند و علاوه بر ان اشتراک همه آنها نیز تهی است.

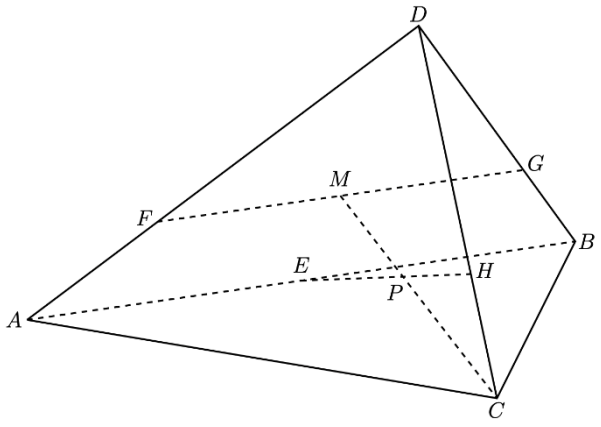
فرض کنیم $B\ ,C$ دو مجموعه از زیر مجموعه های ۱۰ عضوی گفته شده باشند. اگر هر دو زیرمجموعه شامل عضو ۱ باشند که اشتراکشان غیر تهی است. در غیر این صورت یکی از آنها مثلا B برابر است با $\{11و12و13و..و20\}$. اما تنها زیر مجموعه ۱۰ عضوی کم با B اشتراک ندارد مجموعه $\{1و2و3و..و10\}$ است که قبلا آن را حذف کرده ایم. پس در در این حالت هم $B\cap C\neq\emptyset$.

اکنون نشان می دهیم که اشتراک همه زیرمجموعه ها گفته شده تهی است، زیرا به ازای هر عدد $1\le i\le 20$ می توانیم زیرمجوعه ای ۱۰ عضوی که شامل i نباشد و متمایز از $\{1و2و3و..و10\}$ باشد بیابیم. پس هیچ عدد $1\le i\le 20$ به اشتراک مجموعه ها تعلق ندارد.

۷

۷

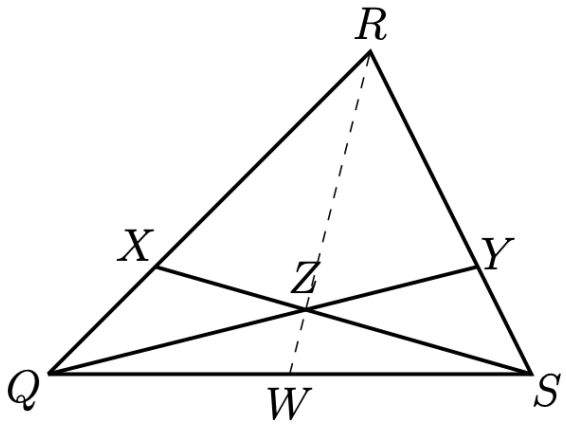
چهاروجهی $ABCD$که قاعده آن مثلث $\triangle ABC$ است را در نظر بگیرید. نقطه E نقطه میانی یال AB است. نقطه F روی AD چنان است که $\overline{FD}=2\overline{AF}$، نقطه G روی BD چنان است که $\overline{GD}=2\overline{BG}$، نقطه H روی CD چنان است که $\overline{HD}=2\overline{CH}$. نقطه M نقطه میانی FG و نقطه P حاصل از تقاطع پاره خطهای EH و CM است. نسبت حجم چهاروجهی $EBCP$ به حجم چهاروجهی $ABCD$ را بدست آورید.



پاسخ :

ابتدا به دو نتیجه زیر دقت کنیم.

نتیجه یک: فرض کنیم $\triangle QRS$ بطوری باشد که نقطه Xروی QR و Yروی SR بطوری که $\overline{XR}=2\overline{QX}$ و $\overline{YR}=2\overline{SY}$. اگر Z نقطه برخورد QY و SX باشد و W نقطه‌ای باشد که امتداد RZ با QS برخورد می‌کند، آنگاه $WR=5WZ$.



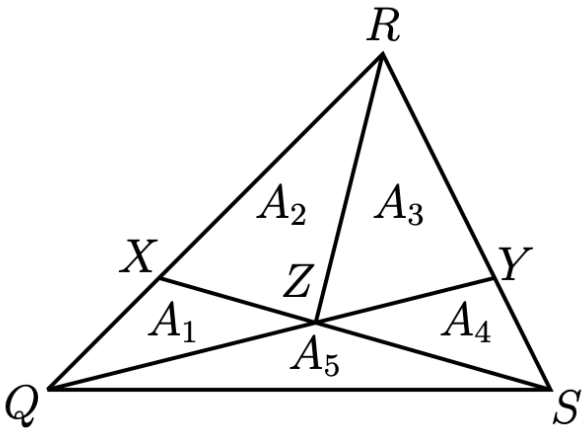
نتیجه دو: از فرض‌های مسئله استنباط می‌شود که نقطه M روی پاره خط واصل D به E چنان است که $\overline{MD}=2\overline{EM}$.

اثبات نتیجه یک: ابتدا نشان می‌دهیم که ارتفاع $\triangle QZS$ از Z یک پنجم ارتفاع $\triangle QRS$ از R است.

فرض کنید طول ارتفاع $\triangle QZS$ از راس Z ، h_1 باشد و برای $\triangle QRS$ از راس R ، h_2 باشد. مساحت $\triangle QZS$ برابر $\frac{1}{2}\overline{QS}h_1$ و مساحت $\triangle QRS$ برابر $\frac{1}{2}\overline{QS}h_2$ است.

در نتیجه، نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر با نسبت طول‌های دوارتفاع یعنی $\frac{h_1}{h_2}$ است. پس کافیست نشان دهیم که نسبت مساحت دو مثلث برابر $\frac{1}{5}$ است.

به این منظور، یک خط از R به Z وصل می‌کنیم و مساحت مثلث‌های $\triangle QXZ$ ، $\triangle RXZ$ ، $\triangle RYZ$ ، $\triangle SYZ$ و $\triangle QZS$ را به ترتیب با A_1، A_2، A_3، A_4و A_5 مشخص می‌کنیم.



به این دلیل که $\triangle QXZ$ و $\triangle RXZ$ ارتفاع‌های برابر دارند و برای قاعده آن‌ها داریم $\overline{XR}=2\overline{QX}$، به دست می آوریم که $A_2=2A_1$.

با استدلال‌های مشابه داریم:

$$A_3 = 2A_4A_2 + A_3 + A_4 = 2(A_1 + A_5) = 2A_1 + 2A_5$$

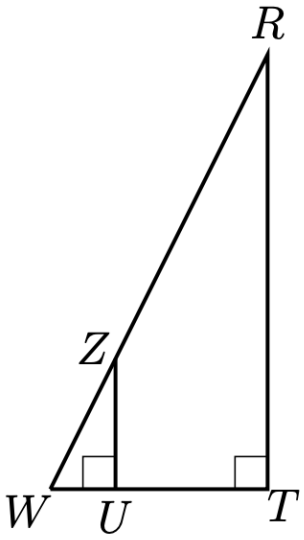
$$A_1 + A_2 + A_3 = 2(A_4 + A_5) = 2A_4 + 2A_5$$

با جایگذاری معادلات بالا بدست می‌آوریم:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 5A_5$$

که از این مطلب به وضوح نتیجه می‌شود که $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{5}$.

حال قرار می‌دهیم که T نقطه‌ای روی QS چنان باشد که RT بر QS عمود باشد و U بر WT چنان باشد که ZU بر RW عمود باشد.



با توجه به اینکه ZU ارتفاع $\triangle QZS$ از Zاست و RT ارتفاع $\triangle QRS$ از Rاست، در نتیجه می‌دانیم که $RT = 5ZU$.

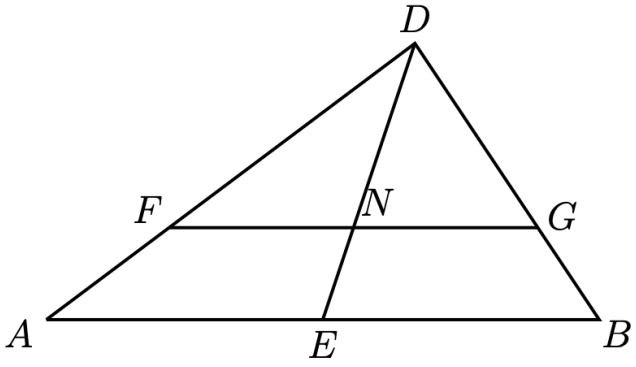
چون $WUZ=WTR=90^\circ$ و ZWU=RWT آنگاه $\triangle ZWU$ با $\triangle RWT$ متشابه است.

چون $\frac{ZU}{RT} = \frac{1}{5}$، نتیجه می‌گیریم $\frac{WZ}{WR} = \frac{1}{5}$.

اثبات نتیجه دو:

مثلث‌های $\triangle ADB$ و $\triangle FDG$ را در نظر بگیرید.

از فرض‌های مسئله می‌دانیم که $\frac{FD}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{GD}{BD}$ ، و چون زاویه راس D در این دو مثلث مشترک است این دو به حالت ضلع زاویه ضلع متشابه‌اند.



قرار دهید N محل تقاطع DE و FGباشد.

چون $\triangle ADB \approx \triangle FDG$ داریم DFN=DAE.

همچنین داریم FDN=ADE چون این دو یک زاویه هستند، که از این نتیجه می‌شود که $\triangle FDN \approx \triangle ADE$.

از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌گیریم که $\frac{FD}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{FN}{AE}$.

با استدلال مشابه داریم: $\frac{GN}{BE} = \frac{2}{3}$.

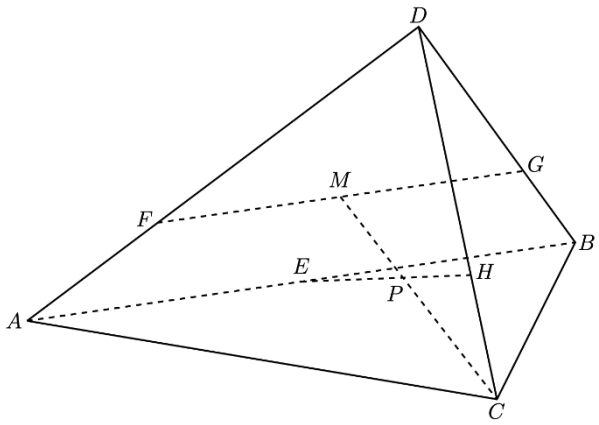
که از این دو و این که E نقطه میانی ABاست نتیجه می‌گیریم که $FN = GN$ ، که نشان می‌دهد Nنقطه میانی FGاست.

پس $M = N$ است که نشان می‌دهد Mروی DE است چون که N روی DEاست.

در نهایت، چون $\triangle FDM$ و $\triangle ADE$متشابهند داریم $\frac{MD}{ED} = \frac{FD}{AD} = \frac{2}{3}$. که نتیجه می‌شود M روی DEچنان است که $MD = 2EM$.

پاسخ اصل سوال:

ابتدا نشان می‌دهیم که ارتفاع چهاروجهی $ABCD$، ۵ برابر ارتفاع چهار وجهی $EBCP$ است. قراردهید K نقطه‌ای باشد که



امتداد خط DP مثلث $\triangle ABC$ را قطع می‌کند و قرار دهید L نقطه‌ای
در $\triangle ABC$ باشد چنان که DL بر مثلث $\triangle ABC$عمود باشد. و قرار دهید V یک نقطه $\triangle ABC$ چنان باشد که PV عمود بر
$\triangle ABC$ باشد.
در این حالت DL ارتفاع $ABCD$ از A به $\triangle ABC$ است و PV ارتفاع $EBCP$ از P به $\triangle EBC$ است.
از نتیجه دوم، M روی DE است چنان که $MD = 2EM$ و H روی DC است چنان که $HD = 2CH$.
از نتیجه اول، $KD = 5KP$.
چون در $\triangle KPV$و $\triangle KDL$ زاویه راس K مشترک است و هر دو زاویه قائم دارند، دو مثلث متشابهند.
این به این معناست که $\frac{PV}{DL} = \frac{KP}{KD} = \frac{1}{5}$.
در نتیجه، طول ارتفاع $ABCD$، ۵ برابر ارتفاع $EBCP$ است.
چون E نقطه میانی AB است، مساحت $\triangle EBC$ نصف مساحت
$\triangle ABC$ است. در نتیجه مساحت قاعده چهاروجهی $EBCP$ نصف مساحت قاعده چهاروجهی $ABCD$ است.
در نتیجه نسبت حجم دو چهاروجهی برابر با $1:10$ می‌شود.

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید