توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

۱-هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۱۶ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند.

۲- مدیران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۱۷مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند.

۳-تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود.

۴-دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

مشخصات اعضای تیم
۱-
۲-
۳-

نام خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	حاصل جمع اندازه‌های ۱۲ ضلع (یال) مکعب مستطیلی برابر ۴۸ سانتی‌متر شده است و همه‌ی یال‌ها عددی طبیعی هستند. مساحت کل این مکعب مستطیل حداکثر چند سانتی‌متر مربع می‌شود؟ پاسخ : مجموع طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل برابر است با $48 \div 4 = 12$ بنا براین سه بعد مکعب مستطیل می تواند به صورت های زیر باشد ۱و۱و۱۰ ۱و۲و۹ ۱و۳و۸ ۱و۴و۷ ۲ و۲و۸ ۲و۳و۷ ۲و۴و۶ ۳و۳و۶ ۳و۴و۵ ۴ و۴و۴ ۵و۵و۲ ۵و۶و۱ و با محاسبه حالت های فوق بیشترین مساحت کل برای حالت ۴و۴و۴ به دست می آید که برابر ۹۶ است	۳
۲	آیا می توان گفت اگر در دو مثلث ۵ جزء از شش جزء اصلی(یعنی سه ضلع و سه زاویه برابر باشند، دو مثلث همنهشت هستند. پاسخ : خیر، دو مثلث در نظر بگیرید که اضلاع یکی ۴ و ۶ و ۹ و اضلاع دیگری ۶ و ۹ و ۱۳/۵ باشد چون $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{9}{13/5}$ این دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب، متشابهند و بنا بر این سه زاویه آنها برابر است. پس این دو مثلث دارای سه زاویه و دو ضلع برابرند اما به وضوح این دو مثلث هم نهشت نیستند.	۴

۳	در آمد ماه اول یک شرکت a تومان بوده است که $a \in N$. درآمد این شرکت در ماه دوم دو برابر ماه اول و در ماه سوم سه برابر ماه اول و همین طور تا ماه نهم در آمد آن ۹ برابر ماه اول بوده است. اگر مجموع در آمد ۹ ماه این شرکت عددی باشد که با تکرار یک رقم نوشته می شود، درآمد ماه اول شرکت حداقل چقدر بوده است؟ پاسخ : $a + 2a + 3a + \cdots + 9a = 45a$ چون این عدد بر ۵ بخش پذیر است پس حاصل آن باید عددی باشد که از تکرار رقم ۵ به دست آمده است. $45a = \overline{555\ldots5} \Rightarrow 9a = \overline{111\ldots1}$ چون سمت چپ عددی است که بر۹ بخش پذیر است بنابر این سمت راست حداقل ۹ رقم ۱ دارد و بنابراین حداقل مقدار که در آمد ماه اول شرکت است برابر است با $a = \frac{111111111}{9} = 12345679$	۵
۴	- در یک نوار مستطیل شکل $1 \times n\ (n \geq 4)$ خانه ها از یک تا n شماره گذاری شده اند. در سه خانه آخر این نوار سه گلوله قرار دارد. دو نفر به شرح زیر یک بازی دو نفره را انجام می دهند. هر نفر در نوبت خود می تواند یک گلوله را بردارد و و در خانه های خالی با شماره کمتر قرار دهد. کسی که در نوبت خود نتواند مهره ای را حرکت دهد بازنده است. نشان دهید نفر اول همیشه می تواند برنده شود. پاسخ : اگر n زوج باشد نفر اول مهره خانه آخر (خانهn)را در خانه اول قرار می دهد و سپس بقیه خانه ها را به صورت زیر دو دو تا دوتا دسته بندی می کند(خانه های ۲و۳، خانه های ۴و۵ و به همین ترتیب تا خانه های n-3 و n-4. از این به بعد نفر دوم هر خانه ای را برای گذاشتن مهره انتخاب کرد نفر اول مهره ای را در خانه هم دسته ای آن قرار می دهد. بدیهی است در این حالت در مرحله ای نفر دوم نمی تواند حرکت کند. حال اگر n فرد باشد. نفر اول مهره خانه n-2 را در خانه اول قرار می دهد و سپس بقیه خانه ها را به صورت زیر دو دو تا دوتا دسته بندی می کند(خانه های ۲و۳، خانه های ۴و۵ و به همین ترتیب تا خانه های n-2 و n-3. از این به بعد مانند حالت قبل نفر دوم هر خانه ای را برای گذاشتن مهره انتخاب کرد نفر اول مهره ای را در خانه هم دسته ای آن قرار می دهد. بدیهی است در این حالت هم در مرحله ای نفر دوم نمی تواند حرکت کند.	۵

۵	۱۰ کارت به شماره های ۱ تا ۱۰ در جعبه ای قرار دارند. از این جعبه ۳ کارت با هم بیرون می آوریم. احتمال آن را حساب کنید که حاصل ضرب آنها مربع کامل یا مضرب ۸ شود. پاسخ : فرض کنیم A پیشامدی باشد که حاصل ضرب سه کارت مضرب ۸ باشد. اگر یکی از ۳ کارت عدد ۸ باشد دو کارت دیگر هرچه باشند حاصل ضرب مضرب ۸ می شود. تعداد این سه تایی ها برابر است با $\frac{9\times8}{2}=36$ اگر ۸ بین سه کارت نباشد اما ۴ یکی از سه کارت باشدبرای اینکه حاصل ضرب سه کارت مضرب ۸ شود باید حاقل یکی از دو کارت دیگر زوج باشد تعداد سه تایی ها در این حالت برابر است با $\frac{8\times7}{2}-\frac{5\times4}{2}=18$ و اگر هیچ کدام از کارت ها ۴ یا ۸ نباشد باید سکارت زوج باشند تا حاصل ضرب آنها مضرب ۸ شود که یک حالت بیشتر نداریم (۲و۶و۱۰) پس روی هم رفته داریم $n(A)=55$ همچنین اگر B پیشامد آن باشد که حاصل ضرب سه کارت مربع کامل باشد . تعداد ای سه تایی ها زیاد نیست و با یک بررسی ساده حالت های زیر به دست می آید $5و8و10 \quad 3و6و8 \quad 2و8و9 \quad 2و5و10 \quad 2و4و8 \quad 2و3و6 \quad 1و4و9 \quad 1و2و8$ پس روی هم رفته ۸ حالت داریم که حاصل ضرب سه کارت مربع کامل است و ابته در ۵ حات آن حاصل ضرب سه کارت مضرب ۸ نیز می باشد. و چون کل حالت های انتخاب سه کارت از ۱۰ کارت می شود $\frac{10\times9\times8}{6}=120$ پس احتمال خواسته شده برابر است با $p(A\cup B)=\frac{55+8-5}{120}=\frac{29}{60}$	۶
۶	الف)اگر x,y,z اعدادی گویا باشـــند که $x+y+z=xyz$ ثابت کنید $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ مربع کامل است . ب) چند سه تایی از اعداد طبیعی x,y,z وجود دارد که $x+y+z=xyz$ پاسخ : الف) $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ $=1+x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2z^2$ $=1+(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ $+x^2y^2z^2$ $=1+(xyz)^2-2(xy+xz+yz)+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ $+x^2y^2z^2$ $=1-2(xy+xz+yz)+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2x^2y^2z^2$ $=1-2(xy+xz+yz)+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$ $+2xyz(x+y+z)=(1-xy-xz-yz)^2$	۷

	ب) اگر $x=1$ آنگاه داریم $x+y+1=yz \Rightarrow yz-y-z+1=2 \Rightarrow (y-1)(z-1)=2$ با توجه به طبیعی بودن y,z داریم $y=2,z=3$ یا $y=3,z=2$. با روشی مشابه می توان ۶ جواب زیر را برای این معادله به دست آورد $(x,y,z)=(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ حال نشان می دهیم معادله جواب دیگری ندارد $$x+y+z=xyz \Rightarrow x+y=xyz-z \Rightarrow z=\frac{x+y}{xy-1}$$ چون z یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ است داریم $xy-1<x+y \Rightarrow xy-x-y+1<2 \Rightarrow (x-1)(y-1)<2$ تنها جواب طبیعی این معادله $x=2,y=2$ است، اما در این صورت $z=\frac{4}{3}$ ، که قابل قبول نیست.	
۷	آراز و بردیا یک بازی به صورت زیر انجام میدندابتدا آراز عدد ۱ یا ۲ را انتخاب می کند، سپس بردیا عدد ۱ یا ۲ را انتخاب می کند. سپس این کا را ۱۴ بار دیگر انجام می دهند(روی هم ۱۵ بار).در انتها حاصل جمع ۳۰ عدد انتخاب شده توسط هر دونفر را به دست می آورند. اگراین مجموع مضرب ۶ باشد بردیا برنده است و در غیر این صورت آراز برنده است. آیا بردیا می تواند طوری بازی کند که حتما برنده شود. پاسخ : خیر. آراز می تواند طوری بازی کند که بردیا هیچ راهی برای برد نداشته باشد. برای اثبات این موضوع آخرین حرکت آراز و بردیا را در نظر بگیرید. بردیا در آخرین حرکت فقط وقتی می تواند برنده شود که مجموع ۲۹ عدد انتخاب شده $6k+4$ یا $6k+5$ باشد. اما در آخرین حرکت آراز اگر مجموع ۲۸ عدد انتخاب شده $6k+3$ نباشد، می تواند انتخابی انجام دهد که مجوع ۲۹ عدد نه به صورت $6k+4$ باشد و نه به صورت $6k+5$. پس بردیا برای برد باید طوری بازی کند که در حرکت چهاردهم خودش مجموع اعدا انتخاب شده $6k+3$ شود. حال به همین صورت اگر به عقب برگردیم می بینیم که بردا در صورتی می تواند برنده شود که مجموع دوعدد انتخابی در دور اول $6k$ شود که امکان پذیر نیست.	۷

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید