دانش آموزان عزیز با آرزوی موفقیت شما در مرحله سوم مسابقه متر، لطفا به موارد زیر توجه نمایید

۱- اعضای هر تیم پس از تفکر و مشورت با یکدیگر **راه حل کامل** هر سوال را با خط خوانا زیر آن سوال بنویسند.

۲- هر تیم باید به ۸ سوال پاسخ دهد

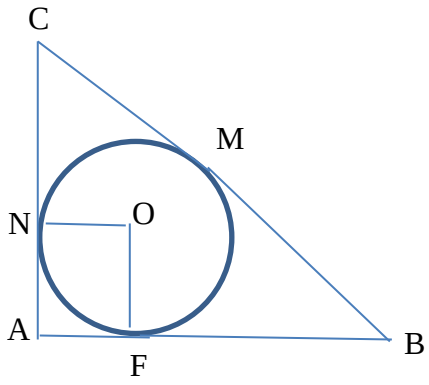
۳- استفاده از ماشین حساب ممنوع می باشد

۴- این آزمون شامل ۸ سوال با جمع ۳۰ امتیاز می باشد.

دمشخصات اعضای تیم
۱-
۲-
۳-

نام خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	حد تابع $f(x)=\frac{1}{[\cos x]}$ در نقطه $x=0$ را بررسی کنید. (نماد [ ] نشان دهنده تابع جزء صحیح می‌باشد) پاسخ : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{[\cos x]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{[1^-]}$ چون مخرج کسر صفر مطلق است حد وجود ندارد. در واقع این تابع در هیچ همسایگی عدد صفر تعریف نمی شود.	۱/۵
۲	اگر $\log_x \sqrt{a}=3$ و $\log_{\sqrt[3]{y}} a^2=4$ حاصل $\log_{x^2y}\sqrt[4]{a}$ را به دست آورید. پاسخ : $\log_x \sqrt{a}=3 \Rightarrow \sqrt{a}=x^3 \Rightarrow a=x^6$ (۱/۵ نمره) $\log_{\sqrt[3]{y}} a^2=4 \Rightarrow a^2=\sqrt[3]{y}^4 \Rightarrow a^6=y^4$ (۰/۵ نمره) از دو رابطه بالا داریم (۰/۵ نمره) $x^2y=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[4]{a^6} \Rightarrow x^2y=\sqrt[6]{a^{11}}$ پس (۱ نمره) $\log_{x^2y}\sqrt[4]{a}=\log_{\sqrt[6]{a^{11}}}\sqrt[4]{a}=\frac{1}{4}\times\frac{6}{11}\log_a a=\frac{3}{22}$	۲/۵

۳	اگر دو خط به معادله‌های y=nx+2 و y=mx-2 در نقطه‌ای به طول 1- بر هم عمود باشند مقدار m+n کدام است؟ پاسخ : چون دوخط بر هم عمودند حاصل ضرب شیب های آنها منفی یک است پس $mn=-1$ (۰/۵ نمره) از طرفی این دو خط به ازای ۱- عرض برابر دارند بنابراین $-m-2=-n+2 \Rightarrow n-m=4$ (۱ نمره) حال از آنجا که $(m+n)^2=(m-n)^2+4mn \Rightarrow (m+n)^2=16-4=12 \Rightarrow$ $m+n=\pm 2\sqrt{3}$ (۱/۵ نمره)	۳
۴	در یک مثلث قائم الزاویه شعاع های دایره محاطی و محیطی به ترتیب ۲ و ۶/۵ است. مساحت مثلث چقدر است؟ پاسخ :  در مثلث قائم الزاویه وتر قطر دایره محیطی است پس BC=13 (۱ نمره) و چون چهارضلعی ONAF مربع است(چون , A=N=F=90) AN=AF (۱ نمره) پس AN=AF =2 . اگر فرض کنیم BF=BM=x آنگاه داریم CM=CN=13-x . از رابطه فیثاغورس داریم $(x+2)^2+(15-x)^2=13^2 \Rightarrow 2x^2-26x+229=169$ $\Rightarrow x^2-13x+30=0 \Rightarrow x=10, x=3$ (۱/۵ نمره) در هر دو حالت دوضلع زاویه قائمه ۵ و ۱۲ می شود و در نتیجه مساحت مثلث برابر ۳۰ است. (۱/۵ نمره)	۴
۵	معادله $x^2-[x]=3$ را حل کنید. پاسخ : چون $x^2-[x]=3$ داریم $[x]=x^2-3$ بنابراین $x^2\epsilon Z$ و $x^2-3 \le x < x^2-2$ (۱/۵ نمره) $x^2-3 \le x \Rightarrow x^2-x-3 \le 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ همچنین $x < x^2-2 \Rightarrow x^2-x-2>0 \Rightarrow x<-1$ یا $x>2$ (۲ نمره) اشتراک جواب های دو نامعادله بالا می شود $[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1) \cup (2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ (۰/۵ نمره) که با توجه به فرض $x^2\epsilon Z$ تنها جواب معادله $\sqrt{5}$ است. (۰/۵ نمره)	۴/۵

۶	معادله روبرو را حل کنید . $4^x - 2\times5^{2x} < 10^x$ پاسخ : با تقسیم دو طرف نامعادله بر 25^x داریم (۲ نمره) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 < \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ حال اگر قرار دهیم $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$ آنگاه داریم: (۱/۵ نمره) $y^2 - y - 2 < 0 \Rightarrow -1 < y < 2$ و چون $y > 0$ داریم $y < 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x} < 2 \Rightarrow x < \log_{0/4} 2$ (۱ نمره)	۴/۵
۷	الف) اگر میانگین و واریانس x,y به ترتیب ۵ و ۱ باشد واریانس x,y,2 چقدر است ب) با رقم های ۱،۲و۳ یک عدد نه رقمی می سازیم.احتمال آن را حساب کنیدکه هر دو رقم متوالی این عدد یک واحد اختلاف داشته باشند پاسخ : الف) میانگین سه عدد $x,y,2$ می شود $\frac{2\times5+2}{3} = 4$ از طرفی داریم $\sigma^2 = \frac{(x-5)^2 + (y-5)^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 10(x+y) + 50}{2} = \frac{x^2 + y^2 - 50}{2}$ $= 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 52$ حال واریانس سه عدد می شود $\frac{(x-4)^2 + (y-4)^2 + 4}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 8(x+y) + 36}{3} = \frac{52 - 100 + 36}{3}$ که برابر است با $\frac{8}{3}$ (۲/۵ نمره) ب) ارقام چنین عددی باید یک در میان ۲ باشد. (۱ نمره) حال دو حالت در نظر می گیریم. اگر رقم اول ۲ باشد برای رقم دوم و همه رقم های مرتبه زوج دو حالت ۱ و ۳ را داریم لذا در این حالت $2^4 = 16$ عدد با شرط خواسته شده داریم و اگر رقم اول ۱ یا ۳ باشد $2^5 = 32$ عدد با شرط خواسته شده داریم. پس احتمال مطلوب می شود $\frac{32+16}{3^9} = \frac{48}{3^9} = \frac{16}{6561}$ (۲/۵ نمره)	۵

۸	۲۰ سکه از دو وزن مختلف و یک ترازوی دو کفه های داریم.ظاهر سکه ها یکسان است. نشان دهید می توان با حداکثر ۱۱ بار توزین می توان تعداد وزنه های سبک و سنگین را از تعیین کرد. پاسخ : ابتدا دو تا از گلوله ها را به دلخواه انتخاب می کنیم و آنها را مقایسه می کنیم(۱ توزین). دو حالت پیش می آید (۱ نمره) الف) دو کفه ترازو نابرابرند. در این صورت یک سکه سبک و یک سکه سنگین شناسایی شده است. سپس این دو مهره را در یک کفه قرار می دهیم و بقیه مهره ها را دوتا دوتا در کفه دیگر قرار می دهیم و با آن دو مقایسه می کنیم. اگر کفه دیگر سنگین تر بود، دو مهره سنگین هستند، اگر کفه دیگ سبک تر بود، دومهره سبک هستند و بالاخره اگر دو کفه برابر بود یکی سبک و یکی سنگین است. پس با ۱۰ مقایسه می توان تعداد سکه های سبک و سنگین را به دست آورد. (۱ نمره) ب) دو کفه برابرند. در این صورت این دو مهره هردو سبک یا هردو سنگین هستند. دوباره مانند حالت اول این دو مهره را در یک کفه قرار می دهیم و بقیه مهره ها را دوتا دوتا با آنها مقایسه می کنیم. اگر دو کفه برابر بودند، سکه ها از نوع همان دوسکه اول هستند. چون سکه ها از دو وزن مختلف هستند در یک مرحله مثلا پس از n توزین دو کفه نا برابر میشود.(تا اینجا n+1 توزین). (۱/۵ نمره) اگر در توزین بعد کفه دوم سنگین تر بود سکه های وزن شده قبلی همه سبک هستند و این دوسکه یا هردو سنگین هستند و یا یکی سبک و یکی سنگین است. با یک توزین دیگر این وضعیت روشن می شود در مورد سکه های وزن شده تعداد سکه های سبک و سنگین مشخص می شود(تا اینجا وضعیت 2n+4 سکه با n+3 توزین مشخص شده). در ادامه مانند حالت اول یک سکه سنگین و یک سکه سبک را در یک کفه قرار می دهیم و وضعیت $20-(2n+4)=16-2n$ را با $8-n$ توزین دیگر مشخص می کنیم. پس با ۱۱ توزین تعداد سکه های سبک و سنگین به دست می آید. (۱/۵ نمره)	۵

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید