دانش آموزان عزیز با آرزوی موفقیت شما در مرحله سوم مسابقه متر، لطفا به موارد زیر توجه نمایید

۱- اعضای هر تیم پس از تفکر و مشورت با یکدیگر **راه حل کامل** هر سوال را با خط خوانا زیر آن سوال بنویسند.

۲- هر تیم باید به ۸ سوال پاسخ دهد

۳- استفاده از ماشین حساب ممنوع می باشد

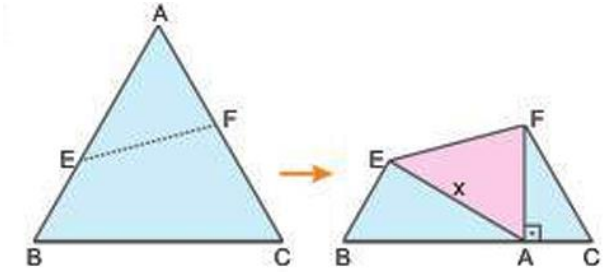
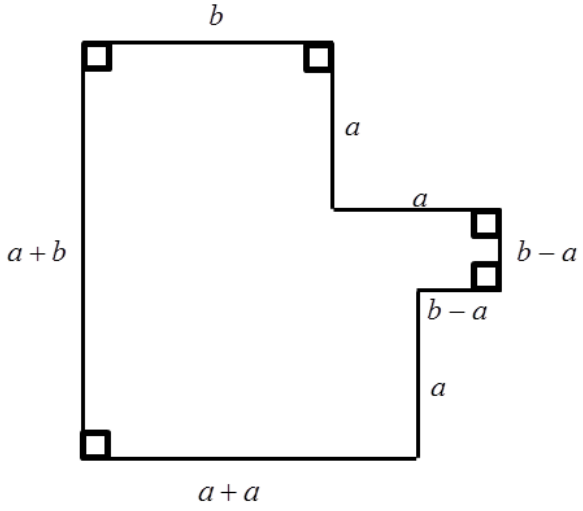
۴- این آزمون شامل ۸ سوال با جمع ۳۰ امتیاز می باشد.

مشخصات اعضای تیم
۱-
۲-
۳-

نام خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	نامعادله $2^{4^k} < 4^{2^k}$ را حل کنید پاسخ : $2^{4^k} < (2^2)^{2^k} \rightarrow 4^k < 2^{k+1} \rightarrow 2^{2k} < 2^{k+1} \rightarrow 2k < k+1 \rightarrow k < 1$	۲/۵
۲	هفت دانش‌آموز در صف هستند که از بین آن‌ها سه نفر خواهرند. چند حالت صف‌آرایی ممکن است که هیچ‌کدام از این سه خواهر کنار هم نباشند (یعنی هیچ دو تا از آن‌ها یا هر سه نفر کنار هم نباشند)؟ پاسخ : سه خواهر را کنار می گذاریم و ۴ نفر دیگر به صف می کنیم $(4! = 24)$ (۱ نمره) $\square\, x\, \square y \square z \square t \square$ حال از پنج مربع بالا سه تا انتخاب می کنیم و سه خواهر را در آن قرار می دهیم ($p(5,3) = 60$حالت) (۱/۵ نمره) پس جواب می شود $24 \times 60 = 1440$ (۱ نمره)	۲/۵

۳	اگر $1/a+1/b+1/c=0$ ثابت کنید : $a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2=3abc$ پاسخ : $1/a+1/b+1/c=0 \Rightarrow (ab+bc+ac)/abc=0 \Rightarrow ab+bc+ac=0 \quad (*)$ (۱ نمره) اما داریم : $a(b+c)\^2+b(a+c)\^2+c(a+b)\^2=$ $a(b\^2+c\^2+2bc)+b(a\^2+c\^2+2ac)+c(a\^2+b\^2+2ab)=$ $ab\^2+cb\^2+ac\^2+bc\^2+ca\^2+ba\^2+6abc=$ $b(ab+bc)+c(ac+bc)+a(ac+ab)+6abc=$ (۱/۵ نمره) حال با استفاده از رابطه $(*)$ داریم $b(-ac)+c(-ab)+a(-bc)+6abc=3abc$ (۰/۵ نمره)	۳
۴	یک تاس را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که حداقل یک بار زوج بیاید و حاصل جمع دو تا ازآنها برار سه شود پاسخ : اگر پیشامد آمدن حداقل یک بار زوج را A و پیشامد اینکه حاصل جمع دو تا از آنها ۳ شود را B بگیریم، پیشامد B وقتی رخ می دهد که در بین سه عدد رو شده یک عدد ۱ و یک عدد ۲ داشته باشیم بنابراین داریم $B \subset A$ بنا بر این داریم (۱/۵ نمره) $P(A \cap B)=P(B)$ اما پیشامد B وقتی رخ می دهد که در بین سه عدد رو شده یک عدد ۱ و یک عدد ۲ داشته باشیم. تعداد حالت هایی که ۱ داریم ۲ نداریم می شود برابر۶۱ (در ۴۸ حالت یکی از تاس ها ۱ باشد، در ۱۲ حالت دوتا از تاس ها ۱ باشد و در ۱ حالت هم هر سه تاس ۱ باشد). تعداد حالت هایی هم که ۲ داریم و ۱ نداریم همین قدر است و تعداد حالت هایی که نه ۱ داریم و نه ۲ می شود $4\times4\times4=64$ پس(۱/۵ نمره) $P(B)=1-P(B')=1-(61+61+64)/216=1-186/216=1-31/36=5/36$ (۱ نمره)	۴

۵	مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع است ، گوشه ی A را بر قاعده از روی خط EF طوری تا می کنیم که $AF \perp BC$. اگر محیط مثلث متساوی الاضلاع $12+12\sqrt{3}$ واحد باشد در اینصورت طول پاره خط EA را بدست آورید.- 	۴
	پاسخ : چون محیط مثلث برابر $12+12\sqrt{3}$ است پس هر ضلع مثلث ABC برابر $4+4\sqrt{3}$. حال فرض کنیم $AC=y$ در ان صورت در مثلث ACF که زاویه ها ۳۰و۶۰و۹۰ است به کمک روابط مثلثاتی داریم $AF=\sqrt{3}y, CF=2y$ بنابراین داریم(۱/۵ نمره) $AF+FC=2y+\sqrt{3}y=4+4\sqrt{3}$ $\Rightarrow y=\frac{4+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-4 \Rightarrow AB=4+4\sqrt{3}-\left(4\sqrt{3}-4\right) \Rightarrow AB=8$ (۱ نمره)حال در مثلث ABE داریم که باز زاویه ها ۳۰و۶۰و۹۰ هستند داریم $x=AB\sin 60=4\sqrt{3}$ (۱/۵ نمره)	
۶	تعدادی تکه چوب به شرح زیر در اختیار داریم $(b>a)$ ۱)۶ تکه چوب به طول a ۲) دو تکه چوب به طول b ۳) دو تکه چوب به طول $b-a$ با استفاده از تمام این ده قطعه چوب، یک ۸ ضلعی به گونه‌ای بسازید که مساحت آن a^2+b^2+ab بشود. 	۴/۵
	پاسخ : پاسخ که در شکل زیر آمده است بر اساس آزمایش و بررسی به دست می آید. (۳ نمره) با تقسیم شکل به ۳ مستطیل مساحت مستطیل می شود $s=ab+(a+b)(b-a)+a(2a)$ $=ab+b^2-a^2+2a^2$ $=a^2+b^2+ab$ (۱/۵ نمره)	

۷	در عدد xyz اگر تفاوت بین بزرگترین و کوچکترین عددی که از آرایش مجدد سه رقم حاصل می‌شود برابر با عدد اولیه‌ی xyz شود مقدار x کدام است؟ پاسخ : بزرگترین و کوچکترین اعدادی که از آرایش مجدد یک عدد سه رقمی به دست می آید دو عدد مقلوب هستندو تفاضل دو عدد مقلوب همواره مضرب ۹۹ است چون (۳ نمره) $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 99(x - z)$ بنابراین عدد مذکور باید مضرب ۹۹ باشد. با بررسی مضارب سه رقمی ۹۹ می بینیم که تنها عددی که در شرط مساله صدق می کند ۴۹۵ می باشد. (۲ نمره)	۵
۸	۲۰ سکه از دو وزن مختلف و یک ترازوی دو کفه های داریم.ظاهر سکه ها یکسان است. نشان دهید می توان با حداکثر ۱۱ بار توزین می توان تعداد وزنه های سبک و سنگین را از تعیین کرد. پاسخ : ابتدا دو تا از گلوله ها را به دلخواه انتخاب می کنیم و آنها را مقایسه می کنیم(۱ توزین). دو حالت پیش می آید (۱ نمره) الف) دو کفه ترازو نابرابرند. در این صورت یک سکه سبک و یک سکه سنگین شناسایی شده است. سپس این دو مهره را در یک کفه قرار می دهیم و بقیه مهره ها را دوتا دوتا در کفه دیگر قرار می دهیم و با آن دو مقایسه می کنیم. اگر کفه دیگر سنگین تر بود، دو مهره سنگین هستند، اگر کفه دیگ سبک تر بود، دومهره سبک هستند و بالاخره اگر دو کفه برابر بود یکی سبک و یکی سنگین است. پس با ۱۰ مقایسه می توان تعداد سکه های سبک و سنگین را به دست آورد. (۱/۵ نمره) ب) دو کفه برابرند. در این صورت این دو مهره هردو سبک یا هردو سنگین هستند. دوباره مانند حالت اول این دو مهره را در یک کفه قرار می دهیم و بقیه مهره ها را دوتا دوتا با آنها مقایسه می کنیم. اگر دو کفه برابر بودند، سکه ها از نوع همان دوسکه اول هستند. چون سکه ها از دو وزن مختلف هستند در یک مرحله مثلا پس از n توزین دو کفه نا برابر میشود.(تا اینجا n+1 توزین). (۱/۵ نمره) اگر در توزین بعد کفه دوم سنگین تر بود سکه های وزن شده قبلی همه سبک هستند و این دوسکه یا هردو سنگین هستند و یا یکی سبک و یکی سنگین است. با	۵/۵

یک توزین دیگر این وضعیت روشن می شود در مورد سکه های وزن شده تعداد سکه های سبک و سنگین مشخص می شود(تا اینجا وضعیت $2n+4$ سکه با $n+3$ توزین مشخص شده). در ادامه مانند حالت اول یک سکه سنگین و یک سکه سبک را در یک کفه قرار می دهیم و وضعیت $20-(2n+4)=16-2n$ را با $8-n$ توزین دیگر مشخص می کنیم. پس با ۱۱ توزین تعداد سکه های سبک و سنگین به دست می آید. (۱/۵ نمره)

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید