مرحله سوم چهارمین دوره مسابقه متر (بخش کتبی)

پاسخنامه پایه هشتم

تاریخ : ۱۴۰۴/۰۵/۰۳ وقت : ۹۰ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.

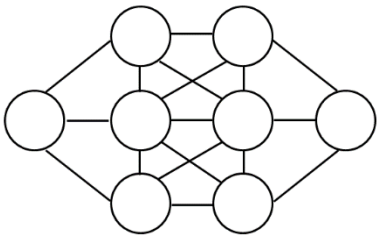
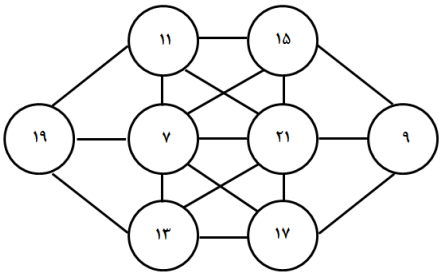
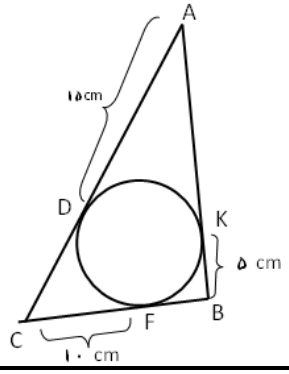
۲- اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.

۳- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۴- این آزمون شامل ۸ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	مجموع ۸ عدد فرد متوالی برابر ۱۱۲ است این اعداد را در دایره‌ها چنان قرار دهید به‌طوری‌که اعداد متوالی مجاور هم نباشند. (دایره‌هایی مجاورند که با یک خط به هم متصل باشند)  حل: عدد پنجمی را x می‌نامیم. بنابراین: $(x-۸)+(x-۶)+(x-۴)+(x-۲)+x+(x+۲)+(x+۴)+(x+۶)=۱۱۲ \Rightarrow ۸x=۱۲۰ \Rightarrow x=۱۵$ ۸ عدد عبارتند از: ۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹,۲۱  	۳
۲	مساحت و محیط مثلث مقابل را حساب کنید. حل: می‌دانیم مماس‌های رسم شده از نقطهٔ خارج یک دایره بر آن دایره، باهم برابرند پس: $AD=AK=۱۵\ ,\ BK=BF=۵\ ,\ CF=CD=۱۰$ $AB=۵+۱۵=۲۰\ ,\ BC=۵+۱۰=۱۵\ ,\ AC=۱۵+۱۰=۲۵$ محیط $=AB+BC+AC=۲۰+۱۵+۲۵=۶۰$ سانتی‌متر $۱۵^۲+۲۰^۲=۲۵^۲ \Rightarrow BC^۲+AB^۲=AC^۲ \Rightarrow \hat{B}=۹۰^\circ$ مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۲۰\times ۱۵=۱۵۰$ سانتی‌مترمربع  	۳
۳	مجموع زاویه‌های یک n ضلعی محدب بدون یکی از آنها برابر ۲۵۷۰ درجه است اندازهٔ زاویه کنار گذاشته‌شده بزرگتر است یا اندازهٔ هر زاویه n ضلعی منتظم؟ حل: اگر x اندازه زاویه کنار گذاشته باشد. داریم: $۱\le x<۱۸۰$ و $(n-۲)۱۸۰-x=۲۵۷۰$	۳/۵

$x = ۱۳۰ \quad , x = ۱۸۰n - ۲۹۳۰ \Rightarrow n = ۱۷$

پس n ضلعی محدب،۱۷ ضلعی محدب است. که زاویه کنار گذاشته‌شده آن ۱۳۰ درجه است.

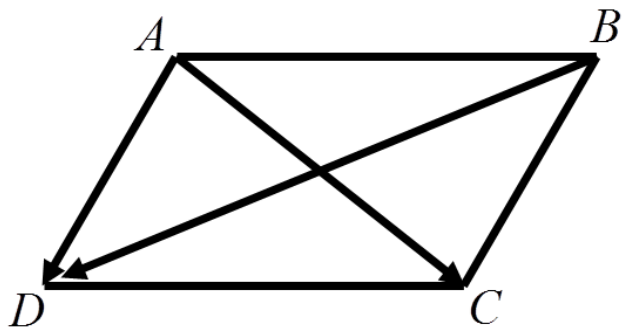
اندازه هر زاویه ۱۷ ضلعی منتظم $= \frac{(۱۷-۲)\times ۱۸۰}{۱۷} \approx ۱۵۹$

بنابراین اندازه هر زوایه ۱۷ ضلعی منتظم، از اندازه زاویه کنار گذاشته‌شده بزرگتر است.

---

۴ (۳/۵)

در متوازی الاضلاع $ABCD$، بردارهای $\vec{AC} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $\vec{AD} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ داده‌شده‌است. مختصات $\vec{BD}$ را به‌دست آورید.



حل:

$$\vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۸ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD}$$

می‌دانیم که $\vec{AD} = \vec{BC}$ پس:

جواب نهایی $\vec{BD} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix}$

---

۵ (۴)

یک فروشگاه ۲۱۳ دوچرخه را در طول یک سال فروخت. فروشندگان در چند ماه اول ۲۰ دوچرخه در هر ماه فروختند. سپس در چند ماه بعد ۱۶ دوچرخه درهر ماه و در ماه‌های باقی مانده ۱۵ دوچرخه درهر ماه فروختند. فروشگاه در چند ماه فقط ۱۵ دوچرخه در هر ماه فروخته است؟

حل: x تعداد ماه‌هایی که ۲۰ دوچرخه در هر ماه اول فروخته شده‌است و y تعداد ماه‌هایی که ۱۶ دوچرخه در هر ماه فروخته‌شده و z تعداد ماه‌هایی که ۱۵ دوچرخه در هر ماه فروخته‌شده‌است. $۲۰x + ۱۶y + ۱۵z = ۲۱۳$ با توجه به $۲۰x$ و $۱۵z$ که مضرب ۵ هستند رقم یکان $۲۰x + ۱۵z$ ، ۵ یا صفر است. پس رقم یکان $۱۶y$ باید ۳ یا ۸ باشد. چون $۱۶y$زوج است پس هیچ وقت ۳ نمی شود

و زمانی رقم یکان $۱۶y$، ۸ می‌شود که رقم یکان y، ۳ یا ۸ باشد و از اینکه $y \le ۱۲$ پس $y = ۳$ یا $y = ۸$

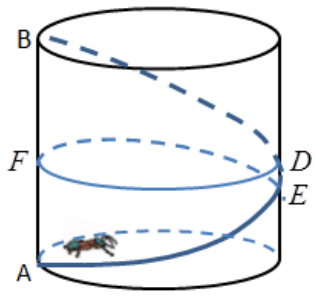
$y = ۸ \Rightarrow z = ۳ \ , \ x = ۲$ $\qquad$ $y = ۳ \Rightarrow z = ۳ \ , \ x = ۶$

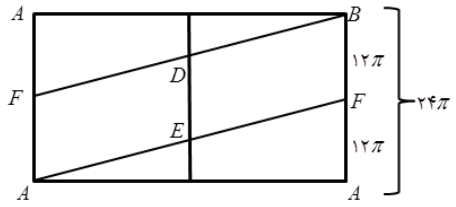
فروشگاه در ۳ ماه فقط ۱۵ دوچرخه درماه فروخته است.

---

۶ (۴)

مورچه‌ای مطابق شکل روی استوانه‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر و ارتفاع ۲۴π سانتی‌متر قرار دارد، این مورچه از نقطه **A** به نقطه **B** حرکت می کند. اگر مسیر طی شده کوتاهترین مسیرممکن باشد و مورچه استوانه را دو دور بزند. طول این مسیر چند سانتی‌متر است؟



	حل: کوتاهترین مسیر برای هر دور، قطر مستطیل حاصل از گسترده استوانه است.اگر F وسط پاره‌خطی باشد که A را به B وصل می‌کند، در دور اول از A حرکت می‌کند و به F می‌رسد و در دور دوم از F حرکت می‌کند و به B می‌رسد.  محیط دایره(قاعده استوانه) یا یک ضلع مستطیل $۸\times۲\times\pi=۱۶\pi$ $(AF)^۲=(۱۲\pi)^۲+(۱۶\pi)^۲=(۲۰\pi)^۲\Rightarrow AF=۲۰\pi\Rightarrow FB=۲۰\pi$ بنابراین طول مسیر طی شده برحسب سانتی‌متر: $۲۰\pi+۲۰\pi=۴۰\pi$	
۷	در تقسیم a بر ۱۵، مجموع خارج قسمت و باقیمانده برابر ۵ است. الف) کوچکترین مقدار x را طوری تعیین کنیدکه $a-x$ بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد.(a و x عدد طبیعی هستند) ب) ۵ عدد برای a به‌دست آورید. **حل:** الف) $a=۱۵k+s\quad,\quad k+s=۵\Rightarrow a-x=۱۴k+k+s-x$ از این‌که $a-x$ بر ۱۴ بخش‌پذیر است پس $k+s-x=۰\Rightarrow x=k+s=۵$ ب) $s=۰\quad k=۵\quad a=۷۵\quad a-۵=۷۰$ $s=۱\quad k=۴\quad a=۶۱\quad a-۵=۵۶$ $s=۲\quad k=۳\quad a=۴۷\quad a-۵=۴۲$ $s=۳\quad k=۲\quad a=۳۳\quad a-۵=۲۸$ $s=۴\quad k=۱\quad a=۱۹\quad a-۵=۱۴$	۴
۸	عابری به مدت ۳/۵ ساعت مسافت۱۷کیلومتر را طی کرد. او نیم ساعت اول، با سرعت۴ کیلومتر در ساعت، نیم ساعت دوم با سرعت۶ کیلومتر در ساعت، نیم ساعت سوم با سرعت۴ کیلومتر در ساعت و در نیم‌ساعت چهارم با سرعت ۶کیلومتر در ساعت ونیم ساعت پنجم با سرعت۴ کیلومتر بر ساعت و نیم ساعت ششم با سرعت ۶ کیلومتربرساعت و بالاخره نیم ساعت هفتم با سرعت۴ کیلومتر در ساعت حرکت کرده‌است، نشان دهید: الف) سرعت متوسط او دربازهٔ زمانی از دقیقه ۱۰ تا دقیقه ۷۰ (یک‌ساعت) ۵ کیلومتربرساعت است. ب)آیا سرعت متوسط عابر در کل مسیر با سرعت متوسط او در هر بازهٔ زمانی یک ساعته برابر است؟ **حل:** الف) مسافت طی شده در ۲۰ دقیقه اول	۵

$۳۰-۱۰=۲۰$ $\frac{۲۰}{۶۰}\times ۴=\frac{۴}{۳}$

مسافت طی شده در ۳۰ دقیقه بعد $\frac{۳۰}{۶۰}\times ۶=۳$

مسافت طی شده در ۱۰ دقیقه آخر $\frac{۱۰}{۶۰}\times ۴=\frac{۲}{۳}$ $۶۰-۳۰-۲۰=۱۰$

مسافت طی شده در طی یک ساعت $\frac{۴}{۳}+۳+\frac{۲}{۳}=۵$

پس سرعت متوسط در بازهٔ یک ساعته، ۵ کیلومتر برساعت است.

ب) خیر

سرعت متوسط عابر در ۳/۵ ساعت : $۱۷\div ۳/۵\approx ۴/۸۵۷$

هر بازهٔ یک ساعته را به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم:

۱- x دقیقه اول با سرعت $v_۱$

۲- ۳۰ دقیقه بعد با سرعت $v_۲$

۳- $۳۰-x$ دقیقه آخر با سرعت $v_۱$ (یکی از $v_۱$ و $v_۲$ ، ۴ و دیگری ۶ است)

$$\frac{x}{۶۰}\times v_۱+\frac{۳۰}{۶۰}\times v_۲+\frac{۳۰-x}{۶۰}\times v_۱=\frac{۱}{۲}v_۱+\frac{۱}{۲}v_۲=\frac{۱}{۲}(v_۱+v_۲)=\frac{۱}{۲}\times ۱۰=۵$$

مسافت طی شده در بازهٔ یک ساعته، ۵کیلومتر است پس سرعت متوسط در هر بازهٔ یک ساعته ۵ کیلومتر در ساعت است.

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید