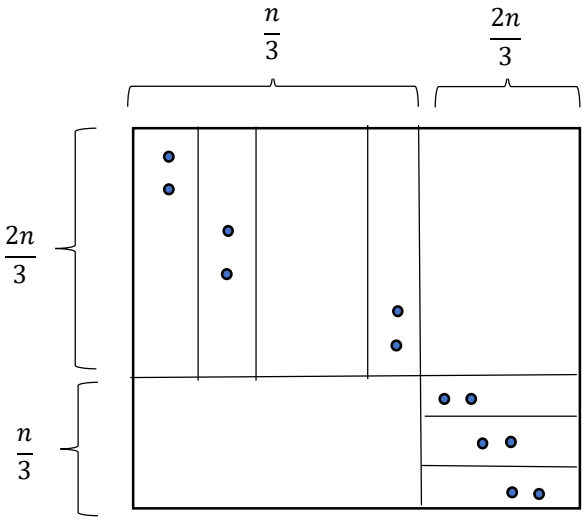
۱-در یک جدول n*n تعداد k مهره رخ قرار دادیم به طوری که همه خانه‌ها حداقل توسط دو رخ تهدید شده است (هر رخ خانه خودش و خانه ی همسطر و هم ستون را تهدید می‌کند) حداقل تعداد مهره های رخ $^{(k)}$چقدر است؟

۲- ثابت میکنیم $k = \left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$. برای سادگی مساله را فقط برای n مضرب سه ثابت میکنیم و بقیه حالات مشابه است.



ابتدا چرا $\frac{4n}{3}$ رخ کافیست؟

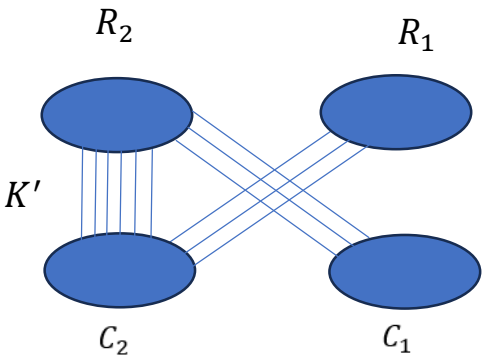
$\frac{4n}{3}$ رخ مطابق شکل روبرو قرار می دهیم.

واضح است هر خانه توسط دو رخ تهدید شده است . حال چرا $\frac{4n}{3}$ رخ لازمست؟

مساله را به صورت یک گراف دو بخشی مدل می کنیم که راس ها بصورت CUR است که $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ متناظر ستون ها و $R = \{r_1, \dots, r_n\}$ متناظر سطرها هستند و بین r_i و c_j یال داریم اگر یک رخ در سطر i و ستون j باشد. تعداد یال های این گراف برابر k (تعداد رخ ها) است.

Cرا به دو مجموعه c_2 و c_1 افراز می کنیم که c_1 راس هایی با درجه۱ و c_2 راس هایی با درجه حداقل دو است.(به راحتی میتوان ثابت کرد که راس درجه صفر نداریم وگرنه $k \geq 2n$) بطور مشابه Rرا به دومجموعه r_2 و r_1افراز می کنیم.

با توجه به فرض مساله هیچ یال بین R_1و C_1نیست اگر فرض کنیم K' یال بین R_2و C_2 باشد.



با شمردن تعداد یال ها داریم:

$$K = K' + |R_1| + |C_1| \text{❋}$$

از طرف دیگر

$$e(C_1, R_2) = |C_1| \geq 2\,|R_2| - K' = 2n - 2|R_1| - K'$$
$$e(C_2, R_1) = |R_1| \geq 2\,|C_2| - K' = 2n - 2|C_1| - K'$$

یا جمع دو نامساوی فوق داریم:

$$|C_1| + |R_1| \geq 4n - 2|R_1| - 2|C_1| - 2K' \Rightarrow$$
$$3(|C_1 + R_1|) \geq 4n - 2K'$$

با توجه به ❋ داریم:

$$K \geq K' + \frac{4n}{3} - \frac{2K'}{3} = \frac{4n}{3} + \frac{K'}{3}$$

پس $K \geq \frac{4n}{3}$ و نتیجه حاصل است.