مسابقه متر-سومین دوره (پاسخنامه)

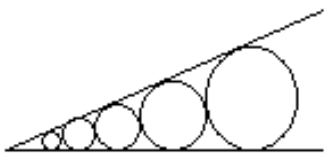
مرحله سوم (بخش عملی -شفاهی)

پایه دهم(۱۰)-مرداد ۱۴۰۳

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : خانه ریاضیات :

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	در صد جمله اول دنباله هندسی روبرو چند عدد گویا وجود دارد $\sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{7}, \dots \dots$ حل : قدر نسبت این دنباله برابراست با $7^{\frac{1}{3}} \div 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{-1}{6}}$ بنابراین جمله عمومی دنباله می شود $t_n = t_1 \times r^{n-1} = 7^{\frac{1}{2}} \times \left(7^{\frac{-1}{6}}\right)^{n-1} = 7^{\frac{4-n}{6}}$ پس برای اینکه یک جمله دنبال گویا باشد باید 4-n بر ۶ بخش پذیر باشد بنابراین n باید مقادیر زیر باشد ۴و۱۰و۱۶و...و۱۰۰ در نتیجه جواب سوال ۱۷ می باشد.	۳
۲	ثابت کنید تابع زیر یک تابع ثابت است: $f(x) = \frac{1}{8}(sin^8x - cos^8) - \frac{1}{3}\left(\sin^6 x - \frac{1}{2}\cos^6 x\right) + \frac{1}{4}\sin^4 x$ حل : $f(x) = \frac{3(sin^8x - cos^8x) - 8sin^6x + 4cos^6x + 6sin^4x}{24}$ صورت کسر را ساده می کنیم $3(sin^2x - cos^2x)(sin^4x + cos^4x) - 8sin^6x + 4cos^6x + 6sin^4x =$ $3sin^6x + 3sin^2xcos^4x - 3cos^2xsin^4x - 3cos^6x - 8sin^6x + 4cos^6x + 6sin^4x$ عبارت اخیر برابر است با $-5sin^6x + cos^6x - 3sin^2xcos^2x(1 - 2sin^2x) + 6sin^4x$ $= \dots = sin^6x + cos^6x + 3sin^2xcos^2x = 1$ بنابراین $f(x) = \frac{1}{24}$	۳
۳	در شکل روبرو شعاع دایره اول ۸ و شعاع دایره آخر ۱۸ است ، شعاع دایره سوم را به دست آورید .  حل : اگر از مراکز سه دایره متوالی بر ضلع پایینی عمود کنیم یک ذوزنقه قائم الزاویه به دست می آید .اگر شعاع های سه دایره به ترتیب x,y,z باشند، با استفاده از خواص خطوط موازی در ذوزنقه ثابت می شود $y^2 = xz$.	۴

مسابقه متر-سومین دوره (پاسخنامه)

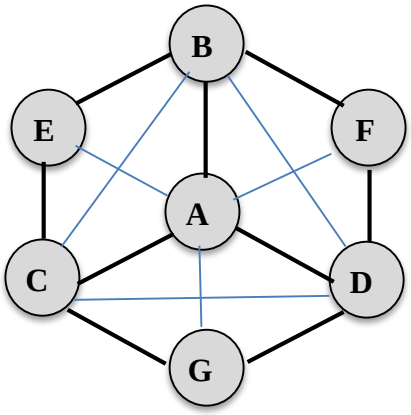
مرحله سوم (بخش عملی -شفاهی)

پایه دهم(۱۰)-مرداد ۱۴۰۳

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : خانه ریاضیات :

	بنابراین اگر x,y,z را شعاع های سه دایره بینی بگیریم داریم: $x^2 = 8y\,, y^2 = xz\,, z^2 = 18y$ از ضرب این سه تساوی به دست می آید $x^2y^2z^2 = 144y^2$ xz⇒xz=144⇒$y^2 = 144 \Rightarrow y = 12$	
۴	چها عدد a, b, c, d که $abcd = 1$ و عدد غیر صحیح نیز بین آنها وجود دارد، را در نظر می گیریم و سپس از آنها چهار عدد ab, bc, cd, da را می سازیم و به همین شکل هم از چهار عدد به دست آمده چهار عدد جدید می سازیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم. آیا ممکن است با انجام چند مرحله این کار به اعداد اولیه برگردیم حل) با ادامه کار اعداد گروه سوم می شوند $ab^2c\,, bc^2d\,, cd^2a\,, da^2b$ و در مرحله چهارم پس از جایگذاری $abcd = 1$ به اعداد d^2a^2 و c^2d^2 و b^2c^2 و a^2b^2 می رسیم که مربع اعداد مرحله دوم هستند. همچنین اعداد گروه پنجم مربع اعداد گروه سوم هستند و این روند ادامه دارد، لذا حداقل یکی از اعداد به سمت بی نهایت میل می می کند و بنابراین هیچگاه به اعداد اولیه بر نمی گردیم.	۴
۵	اعداد ۱ تا ۷ را طوری به دایره های شکل زیر نسبت دهید که مجموع اختلاف های اعداد دایره های مجاور کمترین باشد. (دو دایره مجاور، دو دایره را گوییم که توسط پاره خطی به هم وصل شده باشند)  حل : برای اعداد ۱و۲و۳و۴و۵و۶و۷، ۲۱ تفاضل به دست می آید. شش تا ۱، پنج تا ۲ و...ویک ۶ که مجموع همه آنها می شود ۶+۱۰+۱۲+۱۲+۱۰+۶ =۵۶ در شکل ۱۵ پاره خط وجود دارد. برای مینیمم شدن مجموع اختلاف های خواسته شده می توان پاره خط های رسم نشده را در نظر گرفت و مجموع اختلاف های مربوط به آنها را ماکزیمم کرد.	۵

مسابقه متر-سومین دوره (پاسخنامه)

مرحله سوم (بخش عملی -شفاهی)

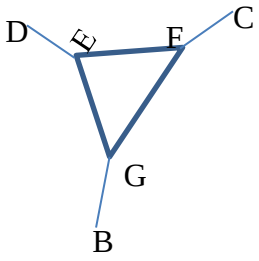
پایه دهم(۱۰)-مرداد ۱۴۰۳

شورای خانه های ریاضیات ایران

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : خانه ریاضیات :

	فرض کنیم $E > F > G$ در این صورت مجموع تفاضل های سه ضلع مثلث می شود $E-F+F-G+E-G=2(E-G)$ برای ماکزیمم شدن این عبارت فرض می کنیم E=7 , G=1 حال مجموع تفاضل های مربوط به ۶ پاره خط می شود $12+7-D+B-1+[F-C]=18+B-D+[F-C]$ با انتخاب C=3 , F=5 , D=2 , B=6 ماکزیمم برابر ۲۴ به دست می آید. پس مینیمم خواسته شده می شود ۵۶-۲۴=۳۲ 	
۶	الف) یک صفحه شطرنج ۸ در ۸ را در نظر بگیرید. می خواهیم در برخی از خانه های این صفحه مهره رخ قرار دهیم طوری که هر کدام از ۶۴ خانه ی صفحه توسط دست کم دو مهره رخ تهدید شوند. می دانیم که هر مهره رخ، خانه ای که در آن قرار گرفته و خانه های دیگری که با خانه خودش در یک سطر یا ستون قرار دارند را تهدید می کند. سعی کنید با کمترین تعداد مهره رخ ممکن این کار را انجام دهید. ب) حال اگر یک صفحه شطرنج با طول n داشتیم در مورد کمترین تعداد مهره رخ چه می توانید بگویید. حتی اگر نمی توانید کمترین مقدار ممکن را پیدا کنید سعی کنید گزاره هایی شبیه این ثابت کنید که مثلا با تعداد معینی مهره رخ نمی توان این کار را انجام داد یا با تعداد مشخصی مهره رخ می توان این کار را انجام داد. به چنین گزاره هایی، "یافتن کران بالا و کران پایین برای جواب مساله" می گویند. تلاش کنید بهترین کرانهای بالا و پایین برای جواب مساله را که می توانید بیابید. **حل : الف)** پاسخ این سوال عبارت است از ۱۱. ابتدا به سادگی می توان دید که می توان با ۱۱ رخ هر خانه را دو بار تهدید کرد.(یک نمونه در ادامه آورده شده است) برای اینکه نشان دهیم با تعداد کمتر نمی توان این کار را کرد از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنید می خواهیم با ۱۰ رخ هر خانه را دو بار تهدید کنیم. اول دقت کنید که هیچ سطر یا ستونی نمی تواند خالی از رخ باشد. برای مثال اگر سطر اول رخ نداشته باشد آنگاه خانه های سطر اول هر یک باید توسط دو رخ در ستون خودشان تهدید شوند در این صورت به ۱۶ رخ نیاز داریم.	۵

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : خانه ریاضیات :

❊							❊
	❊					❊	
		❊			❊		
				❊			
			❊				
				❊			
			❊				
		❊					

حال تعداد سطر های با دقیقا یک رخ را در نظر بگیرید. چون ۱۰ رخ داریم پس دست کم ۶ سطر هستند که در هر یک دقیقا یک رخ قرار دارد. حال بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض کنید که این ۶ سطر، سطر های ۱ تا ۶ هستند. این ۶ سطر مجموعا ۶ رخ دارند. به این ۶ رخ، رخهای خوب می گوییم. دقت کنید که برای تهدید هر یک از خانه هایی که ۶ رخ خوب حضور دارند یک رخ دیگر نیاز داریم که آن رخ دیگر یا از میان همین رخ های خوب هست (که در این صورت این دو رخ خوب الزاما باید در یک ستون باشند) یا یک رخ غیر خوب در ستون مربوطه قرار دارد. اکنون با بررسی همه حالت های ممکن برای نحوه قرار گرفتن رخ های خوب به تناقض می رسیم.

حالت اول: در بین ۶ سطر اول دست کم ۵ ستون بدون رخ باشند. در این حالت هر یک از ستونهای بدون رخ خانه هایش یک بار توسط رخ های خوب تهدید می شود و برای تهدید دوباره آنها یک رخ غیر خوب هم نیاز داریم. پس مجمولا باید ۵ + ۶ =۱۱ رخ داشته باشیم.

حالت دوم: در بین ۶ سطر اول حداکثر ۴ سطر بدون رخ خوب داریم. در این حالت دست کم ۴ ستون هستند که در بین ۶ سطر اولشان دقیقا یک رخ خوب دارند. در هر یک از این ۴ ستون، خانه ای که رخ در آن قرار دارد را در نظر بگیرید. این خانه یک بار توسط رخی که در آن هست تهدید می شود و برای تهدید دوم لازم است که توسط یک رخ غیر خوب تهدید شود. از آنجایی که این ۴ رخ هیچ دو تایی در یک ستون نیستند لذا برای تهدید آنها ۴ رخ غیرخوب نیاز داریم. همچنین دو ستون هم داریم که در بین ۶ سطر اول هیچ رخ خوبی ندارند. این ستون ها می بایست توسط دو رخ غیر خوب به غیر از قبلی ها تهدید شوند. لذا مجموعا ۶ + ۴ + ۲ =۱۲ رخ نیاز خواهیم داشت که تناقض است. پس کمترین تعداد همان ۱۱ رخ است.

ب) پاسخ این قسمت در فایل جداگانه آورده می شود

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : خانه ریاضیات :

۷	در یک مهمانی ۱۶ نفر شرکت کرده اند که از این افراد دقیقا ۸ نفر طرفدار استقلال و بقیه ۸ نفر طرفدار پرسپولیس هستند. در ابتدای مهمانی برخی افراد با یکدیگر دست می دهند. در این بین دقیقا ۱۷ تا از دست دادن ها بین دو نفر که طرفدار دو تیم مختلف هستند اتفاق می افتد. فرض کنید که تعدادی بسته داریم که در هر بسته ۱۰۰ تا توپ وجود دارد. توپهای هر دسته همگی همرنگند و توپهای دسته های مختلف رنگهای مختلفی دارند. هدف ما این است که به هر فرد تعدادی توپ بدهیم که این دو شرط برقرار باشند: ۱- اگر دو فرد طرفدار دو تیم مختلف باشند و با هم دست داده باشند حداقل یک توپ همرنگ داشته باشند. ۲- در هر حالت دیگری دو نفر هیچ توپ همرنگی نداشته باشند. (یعنی دو نفر که با هم دست نداده اند یا طرفدار یک تیم هستند نمی توانند توپ همرنگی داشته باشند.) دقت کنید که می توانیم به برخی افراد چند توپ با رنگهای مختلف بدهیم یا هیچ توپی ندهیم. الف) اگر تعداد دسته ها برابر با ۱۶ دسته باشد آیا می توانیم توپها را بین افراد طوری پخش کنیم که دو خاصیت بالا برقرار باشند؟ ب) اگر تعداد دسته ها برابر با ۱۷ باشد چطور؟ **حل :** الف) از آنجایی که در بین هر سه نفر، دست کم دو نفر طرفدار یک تیم هستند و در نتیجه نباید توپ همرنگ داشته باشند لذا هر رنگ توپ می تواند به حداکثر ۲ نفر برسد. در نتیجه هر رنگ توپ می تواند حداکثر یک بار دست دادن را مشخص کند و چون ۱۷ بار دست دادن افاق افتاده است پس با ۱۶ رنگ نمی توان شرایط مساله را ارضا کرد. ب) هر بار که دو نفر دست می دهند، یکی از رنگها که تاکنون انتخاب نشده است را در نظر میگیریم و دو توپ از آن دسته برداشته و به دو نفری که دست می دهند می دهیم. چون ۱۷ بار دست دادن اتفاق افتاده و ۱۷ رنگ مختلف هم داریم پس این کار شدنی است و به وضوح فقط به افرادی که دست داده اند توپ همرنگ می رسد. در نتیجه شرایط مساله برقرار خواهد بود.	۶