مسابقه متر-سومین دوره (پاسخنامه)

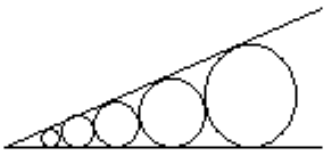
مرحله سوم (بخش عملی -شفاهی)

پایه نهم(۹) -مرداد ۱۴۰۳

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : **خانه ریاضیات :**

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	از حاصل جمع مربعات دو عدد صحیح حاصل ضرب آنها را کم کردیم و سپس پاسخ به دست آمده را در مجموع آن دو عدد ضرب کردیم عدد ۷۲ به دست آمد. عدد بزرگتر چقدر است؟ حل : طبق صورت سوال داریم $(x^2+y^2-xy)(x+y)=72$ با ضرب دو پرانتز و ساده کردن عبارت داریم $x^3+y^3=72$ که چون x , y عددصحیح هستند این دو عدد ۴و۲ هستند. پس عدد بزرگتر ۴ است.	۳
۲	دو دونده دور یک میدان دایره ای حرکت می کنند. آن دو وقتی خلاف مسیر هم حرکت کنند هر ۱۰ دقیقه یک بار به هم می رسند و اگر در یک جهت حرکت کنند هر ۹۰ دقیقه یک بار به هم می رسند. هر یک از دونده ها در چند دقیقه یک دور می زند. حل : فرض کنیم مدت زمانی که این دو دونده یک دور می زنند x , y باشد.. این دو با هم یک دور را در ۱۰ دقیقه طی می کنند. پس در یک دقیقه یک دهم داره را طی می کنند، بنابراین داریم $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}$ با استدلالی مشابه داریم $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{90}$ با جمع این دو معادله داریم $\frac{2}{x}=\frac{1}{10}+\frac{1}{90}=\frac{1}{9}$ پس $x=18$ و همچنین $\frac{1}{18}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{4}{90}\Rightarrow y=22/5$	۳
۳	چند عدد ۶ رقمی به صورت $\overline{xyzxyz}$ داریم که بر ۱۴۰۳ بخش‌پذیر باشند؟ حل : $\overline{xyzxyz}=1001\times\overline{xyz}=7\times11\times13\overline{xyz}$ واز طرفی داریم $1403=23\times61$ بنابراین عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ باید هم مضرب ۶۱ باشد و هم مضرب ۲۳ که غیر ممکن است پس هیچ عددی با شرط مساله وجود ندارد.	۳
۴	در شکل روبرو شعاع دایره اول ۸ و شعاع دایره آخر ۱۸ است ، شعاع دایره سوم را به دست آورید . 	۴

مسابقه متر-سومین دوره (پاسخنامه)

مرحله سوم (بخش عملی -شفاهی)

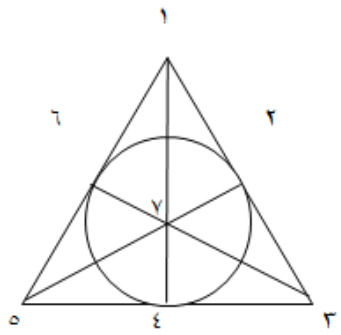
پایه نهم(۹) -مرداد ۱۴۰۳

شورای خانه های ریاضیات ایران

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : **خانه ریاضیات :**

	حل : اگر از مراکز سه دایره متوالی بر ضلع پایینی عمود کنیم یک ذوزنقه قائم الزاویه به دست می آید .اگر شعاع های سه دایره به ترتیب x,y,z باشند، با استفاده از خواص خطوط موازی در ذوزنقه ثابت می شود $y^2 = xz$. **بنابراین اگر x,y,z را شعاع های سه دایره بینی بگیریم داریم:** $x^2 = 8y\,, y^2 = xz\,, z^2 = 18y$ **از ضرب این سه تساوی به دست می آید** $x^2y^2z^2 = 144y^2$ **xz⇒xz=144⇒**$y^2 = 144 \Rightarrow y = 12$	
۵	در یک جدول ۷×۷ حداکثر چند خانه می توان رنگ کرد به طوری که هیچ ۴ تایی از خانه های رنگ شده تشکیل ۴ راس یک مستطیل را ندهند.  حل-جواب ۲۱ است. ابتدا نشان دهید برای یک مجموعه ۷ عضوی می توان ۷ زیرمجموعه ۳ عضوی نوشت که هر دوتای آن‌ها حداکثر یک عضو مشترک داشته باشد (از شکل زیر کمک بگیرید اعداد روی هر خط و اعداد روی دایره را بع عنوان زیرمجموعه ها در نظر بگیرید) حال در هر ستون یک جدول ۷در۷ سطرهای نظیر هر زیرمجموعه را رنگ کنید. بدیهی است هیچ چهار خانه ای نمی تواند چهار راس یک مستطیل باشد. چون در این صورت باید دو تا از زیر مجموعه های ما دو عضو مشترک داشته باشند. حال برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم بیش از ۲۱ خانه را نمی توان رنگ زد.اگر چنین کاری ممکن باشد باید حداقل در یکی از ستون ها ۴ خانه رنگ شود اما در این صورت حتما مستطیلی با ۴ راس از خانه های رنگ شده داریم(چرا؟)	۵
۶	یک صفحه شطرنج ۸ در ۸ را در نظر بگیرید. می خواهیم در برخی از خانه های این صفحه مهره رخ قرار دهیم طوری که هر کدام از ۶۴ خانه ی صفحه توسط دست کم دو مهره رخ تهدید شوند. می دانیم که هر مهره رخ،	۵

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

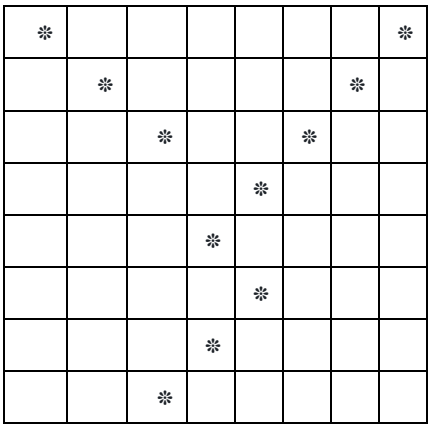
نام و نام خانوادگی اعضای تیم : **خانه ریاضیات :**

خانه ای که در آن قرار گرفته و خانه های دیگری که با خانه خودش در یک سطر یا ستون قرار دارند را تهدید می کند. سعی کنید با کمترین تعداد مهره رخ ممکن این کار را انجام دهید.

حل : پاسخ این سوال عبارت است از ۱۱. ابتدا به سادگی می توان دید که می توان با ۱۱ رخ هر خانه را دو بار تهدید کرد.(یک نمونه در ادامه آورده شده است)

برای اینکه نشان دهیم با تعداد کمتر نمی توان این کار را کرد از برهان خلف استفاده می کنیم.

فرض کنید می خواهیم با ۱۰ رخ هر خانه را دو بار تهدید کنیم. اول دقت کنید که هیچ سطر یا ستونی نمی تواند خالی از رخ باشد. برای مثال اگر سطر اول رخ نداشته باشد آنگاه خانه های سطر اول هر یک باید توسط دو رخ در ستون خودشان تهدید شوند در این صورت به ۱۶ رخ نیاز داریم.



حال تعداد سطر های با دقیقا یک رخ را در نظر بگیرید. چون ۱۰ رخ داریم پس دست کم ۶ سطر هستند که در هر یک دقیقا یک رخ قرار دارد. حال بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض کنید که این ۶ سطر، سطر های ۱ تا ۶ هستند. این ۶ سطر مجموعا ۶ رخ دارند. به این ۶ رخ، رخهای خوب می گوییم. دقت کنید که برای تهدید هر یک از خانه هایی که ۶ رخ خوب حضور دارند یک رخ دیگر نیاز داریم که آن رخ دیگر یا از میان همین رخ های خوب هست (که در این صورت این دو رخ خوب الزاما باید در یک ستون باشند) یا یک رخ غیر خوب در ستون مربوطه قرار دارد.

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : **خانه ریاضیات :**

	اکنون با بررسی همه حالت های ممکن برای نحوه قرار گرفتن رخ های خوب به تناقض می رسیم. **حالت اول: در بین ۶ سطر اول دست کم ۵ ستون بدون رخ باشند. در این حالت هر یک از ستونهای بدون رخ خانه هایش یک بار توسط رخ های خوب تهدید می شود و برای تهدید دوباره آنها یک رخ غیر خوب هم نیاز داریم. پس مجموعا باید ۵ + ۶ =۱۱ رخ داشته باشیم.** **حالت دوم: در بین ۶ سطر اول حداکثر ۴ سطر بدون رخ خوب داریم. در این حالت دست کم ۴ ستون هستند که در بین ۶ سطر اولشان دقیقا یک رخ خوب دارند. در هر یک از این ۴ ستون، خانه ای که رخ در آن قرار دارد را در نظر بگیرید. این خانه یک بار توسط رخی که در آن هست تهدید می شود و برای تهدید دوم لازم است که توسط یک رخ غیر خوب تهدید شود. از آنجایی که این ۴ رخ هیچ دو تایی در یک ستون نیستند لذا برای تهدید آنها ۴ رخ غیرخوب نیاز داریم. همچنین دو ستون هم داریم که در بین ۶ سطر اول هیچ رخ خوبی ندارند. این ستون ها می بایست توسط دو رخ غیر خوب به غیر از قبلی ها تهدید شوند. لذا مجموعا ۶ + ۴ + ۲ =۱۲ رخ نیاز خواهیم داشت که تناقض است. پس کمترین تعداد همان ۱۱ رخ است.**	
۷	کدام بیشتر است؟ چقدر؟ الف) تعداد مربع های لاتین ۴ در ۴ ب) تعداد مربع های لاتین ۵در۵ که سطر اول آن چیده شده است؟(**یک مربع لاتین n در n مربعی است که در هر سطر و هر ستون آن اعداد ۱ تا n نوشته شده باشد)** حل: الف) روش اول: فرمولی برای محاسبه تعداد مربع های لاتین نداریم و باید به صورت نظام دار آنها را بشماریم. برای ۴در۴ سطر اول ۲۴ حالت دارد بنابراین فرض می کنیم سطر اول ۱و۲و۳و۴ است و مربع های لاتین که سطر اولشان ۱و۲و۳و۴ است را می شماریم و سپس در ۲۴ ضرب می کنیم. ابتدا فرض می کنیم اولین عدد سطر دوم ۲ باشد. پس سطر دوم یکی از سه حالت زیر است. ۴ ۳ ۲ ۱ ۳ ۴ ۱ ۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ۳ ۴ ۱ ۲ ۴ ۳ ۲ ۱ ۳ ۴ ۱ ۲	۶

توجه: فقط به چهار سؤال از هفت سؤال زیر پاسخ دهید.

هر گروه باید تا ساعت ۲۴ روز پنج شنبه ۲۵ مرداد یک پاسخنامه آماده کند و برای مدیر خانه شهر خود ارسال کند. میران محترم خانه ها پاسخ ها را حداکثر تا ساعت ۸ صبح روز جمعه ۲۶ مرداد یکجا در ایتا به شماره ۰۹۱۳۳۸۳۷۱۷۳(نصیری) ارسال نمایند. تاخیر در ارسال موجب کسر نمره می شود. دانش آموزان عزیز برگه‌های آزمون را در موقع پرسش شفاهی(طبق جدول زمان بندی) همراه داشته باشید.

نام و نام خانوادگی اعضای تیم : **خانه ریاضیات :**

سطر سوم جدول سمت چپ را به ۲ روش و جدول وسط را به ۴ روش و جدول سمت راست را به ۲ روش می توان نوشت(سطر چهارم هم که برای هر کدام یکتا است) پس تعداد این جدول ها که اولین عدد سطر دوم ۲ است ۸ تا است. به همین ترتیب ۸ تا برای عدد ۳ و ۸ تا برای عدد ۴ داریم که روی هم می شود ۲۴ تا. بنابر ایت تعداد مربع های لاتین ۴ در ۴ برابر است با $24 \times 24 = 576$

روش دوم : اگر سطر اول و ستون اول یک مربع لاتین نوشته شده باشد به آن یک مربع لاتین کاهش یافته می گوییم. ثابت می شود همه مربع های لاتین کاهش یافته مرتبه n را به یک تعداد می توان به یک مربع لاتین مرتبه n گسترش داد. این تعداد برای یک مربع لاتین کاهش یافته مرتبه چهار برابر ۴ است. پس تعداد مربع های لاتین مرتبه ۴ می شود $4! \times 3! \times 4 = 576$ که $4!$ حالت های چیدن سطر اول است و $3!$ تعداد حالت های چیدن سه خانه مانده ستون اول است.

ب) برای شمارش مربع های لاتین ۵در۵ که سطر اوش چیده شده از روش دوم گفته شده در قسمت الف محاسبه می کنیم البته در این روش ابتدا با شمارش نظام دار مستقیم و البته کمی طولانی، به دست می آوریم که یک مربع لاتین کاهش یافته مرتبه ۵ به ۵۶ حالت می تواند به یک مربع لاتین مرتبه ۵ گسترش یابد. پس تعداد مربع های لاتین مرتبه ۵ که سطر اول آنها مشخص است برابر است با $1 \times 4! \times 56 = 1344$ که $1344 - 576 = 768$ تا از مربع های لاتین مرتبه ۴ بیشتر است