پاسخنامه هشتم شفاهی– عملی مرحله سوم کشوری– مرداد ۱۴۰۳

۱- اندازهٔ هر زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم ۶ درجه بیشتر از اندازهٔ هر زاویه داخلی یک m ضلعی منتظم است اگر $n-m=۵$ مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی را حساب کنید. (۳ امتیاز)

پاسخ:

$$\frac{(m-۲)۱۸۰}{m}+۶=\frac{(n-۲)۱۸۰}{n}$$

$$n(m-۲)۱۸۰+۶mn=m(n-۲)۱۸۰$$

$$۱۸۰mn-۳۶۰n+۶mn=۱۸۰mn-۳۶۰m$$

$$\left.\begin{matrix}mn=۶۰(n-m)\\ n-m=۵\end{matrix}\right|\Rightarrow mn=۳۰۰$$

مقسوم علیه‌های ۳۰۰: $۱,۲,۳,۴,۵,۶,۱۰,۱۲,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰,۵۰,۶۰,۷۵,۱۰۰,۱۵۰,۳۰۰$

$$n=۲۰ \qquad m=۱۵ \qquad (۲۰-۲)۱۸۰=۳۲۴۰$$

۲- مجموع n تا عدد طبیعی متوالی برابر ۲۰۲۴ است. (۴ امتیاز)

الف) آن اعداد کدامند؟

پاسخ:

$$a+۱,a+۲,a+۳,...,a+n=a.n+\frac{n(n+۱)}{۲}=۲۰۲۴$$

$$n(۲a+n+۱)=۴۰۴۸=۱۶\times۱۱\times۲۳$$

اگر n فرد باشد

$$n=۱۱\Rightarrow ۲a+۱۱+۱=۳۶۸\Rightarrow ۲a=۳۵۶\Rightarrow a=۱۷۸$$

$$۱۷۹,۱۸۰,۱۸۱,...,۱۸۹$$

$$n=۲۳\Rightarrow ۲a+۲۳+۱=۱۷۶\Rightarrow ۲a=۱۵۲\Rightarrow a=۷۶$$

$$۷۷,۷۸,۷۹,...,۹۹$$

اگر n زوج باشد پس باید $۲a+n+۱$ فرد می‌شود و فقط $n=۱۶$

$$n=۱۶\Rightarrow ۲a+۱۶+۱=۲۵۳\Rightarrow ۲a=۲۳۶\Rightarrow a=۱۱۸$$

$$۱۱۹,۱۲۰,۱۲۱,...,۱۳۴$$

ب) برای n چند جواب وجود دارد؟

پاسخ: $n<۲a+n+۱\Rightarrow n^۲<n(۲a+n+۱)\Rightarrow n^۲<۴۰۴۸\Rightarrow n<۶۴$ **پس برای n فقط سه جواب فوق وجود دارد.**

۳- روی اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاعی را با دایره‌های کوچک " ◯ " می‌پوشانیم. (۴ امتیاز)
و با همین تعداد " ◯ " اضلاع مربعی را می‌پوشانیم.
اگر تعداد " ◯ " ها در روی هر ضلع مربع ۲ تا کمتر از تعداد " ◯ "ها در روی هر ضلع مثلث باشد..
الف) تعداد " ◯ " های را روی مثلث را تعیین کنید.

پاسخ: وقتی تعداد دایره‌های روی ضلع‌ها را جمع کنیم. دایره‌های روی هر رأس ۲ مرتبه حساب می‌شود. اگر تعداد دایره‌ها روی هر ضلع مثلث و تعداد دایره‌ها روی هر ضلع مربع را $n-۲$ داریم:

تعداد دایره‌های روی مثلث $=۳n-۳$

$$\text{تعداد دایره هر مربع}=۴(n-۲)-۴=۴n-۱۲$$

$$۴n-۱۲=۳n-۳\Rightarrow n=۹$$

$$\text{تعداد دایره‌های در هر ضلع مثلث}\ ۹-۲=۷$$

$$\text{تعداد دایره‌های روی مثلث}\ ۳\times۹-۳=۲۴$$

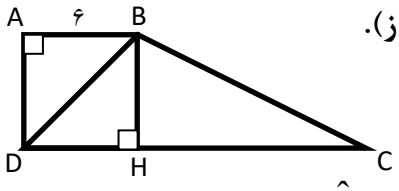
ب) اگر در " ◯ " ها از اعداد ۱ تا n قرار دهیم و مجموع عددهای هر ضلع در مثلث برابر باشد. کمترین مقدار این مجموع را بیابید.

پاسخ: $۱+۲+۳+...+۲۴=\frac{۲۴\times۲۴}{۲}=۳۰۰$

کمترین مجموع اعداد هر ضلع زمانی اتفاق می‌افتد که عددهای روی رأس‌های مثلث ۱ و ۲ و ۳ باشند.

$$\text{مجموع اعداد روی هر ضلع}=\frac{۳۰۰+۱+۲+۳}{۳}=۱۲۰$$

۴- چهار ضلعی $ABCD$ ذوزنقه است به طوری‌که $\hat{A}=۹۰$ ، $AB=۶$ ، BD نیمساز زاویه D است و مساحت $ABCD$ ۷۲ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ ضلع‌های CD و BC را بیابید (۳ امتیاز).



پاسخ:

از اینکه $ABCD$ ذوزنقه است و $\hat{A}=۹۰$ پس $A\hat{D}C=۹۰$ پس $\hat{D}_۱=\hat{D}_۲=۴۵$

در نتیجه $AD=AB=۶$ از B بر DC عمود می‌کنیم. چهار ضلعی $ABHD$ مربع است. پس

$$DH=BH=۶$$

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{BCD}\Rightarrow ۷۲=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶+\frac{۱}{۲}CD\times۶\Rightarrow$$

$$۳CD=۷۲-۱۸\Rightarrow CD=۱۸$$

$$CH=CD-DH \qquad CH=۱۸-۶\Rightarrow CH=۱۲$$

$$\Delta BCH: BC^۲=BH^۲+CH^۲\Rightarrow BC^۲=۶^۲+۱۲^۲\Rightarrow BC^۲=۳۶+۱۴۴=۱۸$$

$$BC=\sqrt{۱۸۰} \qquad BC=۶\sqrt{۵}$$

۵- ۶۰ عدد ۱ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۳}$ و ... و $\frac{۱}{۶۰}$ را روی تخته سیاه نوشته ایم، می توان دو عدد دلخواه مانند a و b را پاک کرد و به جای آن ها عدد $a+b+ab$ را نوشت. پس از ۵۹ بار تکرار این کار فقط یک عدد باقی می ماند، این عدد چیست؟ (۵ امتیاز)

پاسخ: اگر به ترتیب این عمل را انجام دهیم داریم:

$$۱,\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۱+\frac{۱}{۲}=۲ \qquad ۲,\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۲+\frac{۱}{۳}+۲\times\frac{۱}{۳}=۳$$

$$۳,\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۳+\frac{۱}{۴}+۳\times\frac{۱}{۴}=۴ \qquad ۵۹,\frac{۱}{۶۰}\Rightarrow ۵۹+\frac{۱}{۶۰}+۵۹\times\frac{۱}{۶۰}=۶۰$$

برای هر a ، b ، اگر a ، b جابجا شوند $a+b+ab=b+a+ab$ (۱) و برای هر a,b,c داریم.

$$a+b+ab\,,c\Rightarrow (a+b+ab)c=a+b+ab+c+(a+b+ab)c$$

$$=a+b+ab+c+ac+bc+abc \quad (۲)$$

$$a,b+c+bc\Rightarrow a+b+c+bc+a(b+c+bc)=$$

$$a+b+c+bc+ab+ac+abc \quad (۳)$$

عمل را روی سه عدد a,b,c به هر ترتیبی انجام دهیم جواب یکسان است. $(۱),(۲),(۳)\Rightarrow$

با توجه به اینکه این عمل دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری است با هر دو عدد دلخواه دیگر شروع کنیم و به هر ترتیبی عددها را انتخاب کنیم در نهایت جواب ۶۰ می‌شود.

۶- در شکل مقابل $PQRS$ مستطیل است و $MS=۲PQ=۴PM=۴$ و O وسط MR است. نشان دهید مساحت مربعی که اندازه هر ضلع آن مساوی OQ است.برابر مساحت مستطیل است. (۵ امتیاز)

پاسخ:

$$MS=۲PQ=۴PM=۴\Rightarrow PM=۱\,,\ PQ=۲\,,\ MS=۴$$

$$MQ^{۲}=۲^{۲}+۱^{۲}=۵\Rightarrow MQ=\sqrt{۵}$$

$$MR^{۲}=۱۶+۴=۲۰\Rightarrow MR=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow OM=\sqrt{۵}\Rightarrow OM^{۲}=۵$$

در مثلث QMR داریم:

$$OM^{۲}=۵\,,\ MR^{۲}=۲۰\quad QR^{۲}=۵^{۲}=۲۵\Rightarrow OM^{۲}+MR^{۲}=QR^{۲}\Rightarrow R\hat{M}Q=۹۰$$

$$\Delta OMQ:\hat{M}=۹۰\Rightarrow MQ^{۲}+OM^{۲}=OQ^{۲}\Rightarrow ۵+۵=OQ^{۲}\Rightarrow OQ^{۲}=۱۰$$ مساحت مربع به ضلع OQ

مساحت مستطیل= مساحت مربع به ضلع $OQ\Rightarrow$ مساحت مستطیل $PQRS=۲\times۵=۱۰$

