مرحله سوم سومین مسابقه متر (بخش

پایه دهم ۱۰

تاریخ : ۱۴۰۳/۵/۵ وقت : ۱۱۰ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- **امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.**

۲- **هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.**

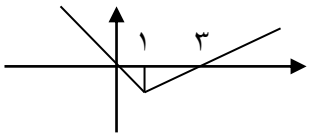
۳- **اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.**

۴- **استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

۵- **این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۳ صفحه تنظیم شده است.**

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	ثابت کنید $2(1+\sin x)(1+\cos x)=(1+\sin x+\cos x)^2$ حل : $2(1+\sin x)(1+\cos x)=2(1+cosx+sinx+sinx.cosx)=$ $2+2cosx+2sinx+2sinx.cosx$ $=1+cos^2x+sin^2x+2cosx+2sinx+2sinx.cosx$ $=(1+sinx+cosx)^2$	۲
۲	شکل زیر نمودار تابع f است اگر برد تابع بازه $(\infty+ , 1-]$  معادله تابع را بنویسید. حل : نمودار تابع از نقطه $(1-و1)$ گذشته است پس داریم $f(x)=\begin{cases}-x & x\le 1\\ \frac{x}{2}-\frac{3}{2} & x>1\end{cases}$	۲
۳	از بین اعداد طبیعی بین ۱۴۰۳ و ۲۰۲۴ یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آنرا حساب کنید که این عدد رقم تکراری نداشته باشد حل : حالات ممکن کل اعداد طبیعی بین ۱۴۰۳ و ۲۰۲۴ است که برابر است با ۶۲۰ برای به دست آوردن حالات مطلوب گوییم از ۱۴۰۰ تا ۲۰۰۰ تعداد اعدادی که ارقام متفاوت دارند برابر است	۳

	با $1\times6\times8\times7=336$ (برای صدگان ۶ حالت ۴و۵و۶و۷و۸و۹ را داریم) ازاین تعداد عدد ۱۴۰۱ بایدکم شود و هفت عدد ۲۰۱۳ تا ۲۰۱۹ اضافه شود پس تعداد حالات مطلوب می شود۳۴۲ و بنابراین احتمال خواسته شده می شود $\frac{342}{620}=\frac{171}{310}$	
۴	**در یک دنباله حسابی افزایشی با جملات مثبت، حاصل‌ضرب جملات اول و چهارم $\frac{۹۱}{۹}$ و حاصل‌ضرب جمله‌های دوم و سوم ۱۱ است . جملهٔ صدویکم این دنباله را به‌دست آورید.** **حل:** **چهار جمله اول دنباله را به صورت $a-۳t,a-t,a+t,a+۳t$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:** $\begin{cases}(a-۳t)(a+۳t)=\frac{۹۱}{۹}\\(a-t)(a+t)=۱۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^۲-۹t^۲=\frac{۹۱}{۹}\\a^۲-t^۲=۱۱\end{cases}$ باتوجه به اطلاعات سوال $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۱}{۳}\\a=\frac{۱۰}{۳}\end{cases}$ **پس در این دنباله داریم:** $a_۱=\frac{۷}{۳}\ ,\ d=\frac{۲}{۳}$ $t_{۱۰۱}=a_۱+۱۰۰d=\frac{۷}{۳}+\frac{۲۰۰}{۳}=\frac{۲۰۷}{۳}=۶۹$	۳
۵	دو عدد غیرصفر پیدا کنید که مجموع آنها و حاصل ضرب آنها و تفاضل مربعات آنها هرسه باهم برابر باشد. **حل :** $x^2-y^2=x+y\Rightarrow x+y=0$ یا $x-y=1$ **اگر $x+y=0$ آنگاه هر دو عدد باید صفر باشند که غیر قابل قبول است. پس داریم x-y=1 و بنابراین** $xy=x+y\Rightarrow x(x-1)=x+x-1\Rightarrow x^2-3x+1=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ **وچون y=x-1 داریم $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$**	۳
۶	اندازه های زوایای داخلی یک n ضلعی محدب تصاعد حسابی می سازند. اگر کوچکترین زاویه ۱۱۰ و بزرگترین زاویه ۱۶۰ درجه باشد، مقادیر n را به دست آورید **حل :** **بین ۱۱۰ و ۱۶۰ تعداد n-2 واسطه حسابی داریم(بقیه زاویه ها) حال مجموع این n جمله می شود $\frac{n}{2}(110+160)$ اما از طرف دیگر مجموع زاویه های یک nضلعی می شود $(n-2)\times180$ پس** $\frac{n}{2}(110+160)=(n-2)\times180\Rightarrow4n-8=3n\Rightarrow n=8$	۴

۷	عبارات زیر را تا حد امکان ساده کنید $$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}-\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$$ حل : **حاصل پرانتز سمت چپ می شود** $$\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2-(a+x)}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}=\left(\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{ax}}\right)^2$$ $$=\frac{(a+x)\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}{4ax}$$ **به طریق مشابه پرانتز دوم می شود** $\frac{(a+x)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{4ax}$ **پس داریم** $$\frac{(a+x)\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2}{4ax}-\frac{(a+x)\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}{4ax}=\frac{(a+x)\left(4\sqrt{ax}\right)}{4ax}=\frac{a+x}{\sqrt{ax}}$$	۴
۸	کلمه ی BOROUJEN را ۱۰۲۴ بار پشت سر هم می نویسیم، سپس در کلمه ی جدید بدست آمده حروف ردیف های زوج را خط می زنیم (O ، O ، J و ...)، سپس همین کار را روی کلمه ی جدید ولی از سمت راست انجام می دهیم و بار سوم مجددا این کار را از سمت چپ انجام می دهیم و به همین صورت این کار را آن قدر انجام می دهیم تا یک حرف باقی بماند، آن حرف کدام است؟ حل : در اولین مرحله تمام حروف ردیف زوج یعنی O , O , J , N ها خط می خورند . حال ۱۰۲۴ کلمه BRUN کنار هم چیده شده ان و در این مرحلهر همه حروف U , B خط می خورند. در مرحله سوم که عمل خط زدن از سمت چپ شروع می شود، ۱۰۲۴ کلمه RN کنار هم هستند و در این مرحله N ها خط می خورند. در ادامه کار همه حرف ها R هستند پس با ادامه کار حرف R می ماند.	۵

۹	n خط متمایز دو به دو یکدیگر را در نقطه های متمایز قطع کردند و صفحه را به ۱۵۴ ناحیه جدا از هم تقسیم کرده ا ند. تعداد نقاط برخورد این خطوط چقدر است؟ حل : **اگر a_n تعداد ناحیه هایی باشد که n خط به وجود می آورد آنگاه داریم $a_{n+1} = a_n + n + 1$ چون خط n+1 با قطع کردن n خط دیگر n+1 ناحیه جدید اضافه می کند. پس** $$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + n + n - 1 = \cdots = a_1 + 1 + 2 + \cdots + n$$ **و چون $a_1 = 2$ پس داریم $a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$** **در نتیجه $\frac{n^2+n+2}{2} = 154 \Rightarrow n^2 + n + 2 = 308$ که با حل این معادله تعداد خطوط می شود ۱۷و در نتیجه تعداد نقاط برخورد می شود $\binom{n}{2} = 136$**	۵
۱۰	عبارت زیر را تجزیه کنید $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-3xyz = xy^2 + 2xyz + xz^2 + yz^2 + 2xyz + yx^2 + zx^2 + 2xyz + zy^2 - 3xyz =$ $$xy^2 + yx^2 + xyz + xz^2 + zx^2 + xyz + yz^2 + zy^2 + xyz =$$ $$xy(x + y + z) + xz(x + y + z) + yz(x + y + z)$$ $$= (xy + xz + yz)(x + y + z)$$ $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 =$ $x^3 - 2x^2 + 7x^2 - 14x + 12x - 24 = x^2(x - 2) + 7x(x - 2) + 12(x - 2) =$ $(x - 2)(x^2 + 7x + 12) = (x - 2)(x + 3)(x + 7)$	۵

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید