ردیف	سؤالات	امتیاز

مرحله سوم سومین مسابقه متر (بخش کتبی)

پایه نهم ۹

تاریخ : ۱۴۰۳/۰۵/۰۵ وقت : ۹۰ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

۲

۱

به طور تصادفی عدد x را از مجموعه $A=\{4و8و12و \dots و200\}$ و عدد y را از مجموعه $B=\{-4و-8-12و \dots و-200\}$ انتخاب می‌کنیم. x+y چند حالت دارد؟ $x-y$چطور؟

حل :

همه مضارب ۴ از ۱۹۶- تا ۱۹۶ در x+y به دست می آیند (۰/۵)پس x+y با احتساب مقدار صفر ۴۹+۱+۴۹=۹۹ حالت دارد. (۰/۵)

در مورد x-y هم کمترین و بیشترین مقداری که به دست می آید به ترتیب ۸ و ۴۰۰ می باشد، (۰/۵)پس جواب این قسمت هم برابر است با تعداد مضارب ۴ از ۸ تا ۴۰۰ که برابر است با $\frac{400-8}{4}+1=99$ (۰/۵)

۲ | **فاصله نقطه (۵ و ۱) از محل تقاطع دو خط $2y=4$ و $x-5=0$ چقدر است ؟** | ۲

حل :

محل تقاطع دوخط داده شده نقطه A به مختصات $(5,2)$ است(۰/۵) اگر نقطه داده را B بنامیم، با رسم دستگاه مختصات و مشاهده شکل (۱)مثلث قائم الزاویه ای به وجود می آید و طبق قضیه فیثاغورس داریم $AB^2=3^2+4^2=25$ بنابراین فاصله خوسته شده برابر ۵ است. (۰/۵)

۳ | حاصل جمع دو عدد متمایز ۷ برابر تفاضل آنهااست و حاصل ضرب آنها نیز برابر تفاضل آنهاست عدد بزرگتر چقدر است؟ | ۳

حل :

اگر فرض کنیم عدد بزرگتر x و عدد دیگر y باشد داریم. $x+y=7(x-y) \Rightarrow 3x=4y(1)$ بنابراین

$$xy=x-y \Rightarrow 4xy=4x-4y \Rightarrow 3x^2=x(1) \Rightarrow 3x^2-x=0 \Rightarrow x=0\,,x=\frac{1}{3}$$

چون از عدد بزرگتر صحبت شده جواب صفر غیر قابل قبول است و پاسخ سوال $x=\frac{1}{3}$ است. (۱)

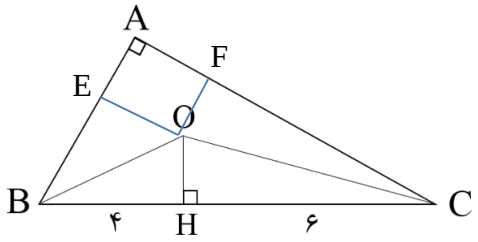
۴ | **عبارت $\frac{x^2+9+6x}{x^2-9}\times\frac{x^2-x-6}{x+3}$ را به کمک اتحاد های جبری، ساده کنید.** | ۳

حل :

کسر داده شده برابر است با $\underbrace{\frac{\overbrace{(zx+3)^2}^{(0/75)}}{\underbrace{(x+3)(x-3)}_{(0/75)}}\times\frac{\overbrace{(x-3)(x+2)}^{(0/75)}}{zx+3}}=x+2(0/75)$

۵	در شکل مقابل $A = ۹۰$ و نیمسازهای BO و CO یکدیگر را در O قطع کرده اند و OH بر BC عمود است. اگر $CH = ۶$ و $BH = ۴$ باشند، مساحت مثلث ABC چقدر است؟	۴

حل :



از نقطه O عمودهای OF , OE را بر اضلاع AB , AC وارد می کنیم. مثلث های OFC , OHC به حالت وتر و یک زاویه تند برابرند، پس $CF=6$ و $OF=OH$ (۱)

به دلیل مشابه $OE=OH$, $BE=4$ بنابراین $OE=OF$

و در نتیجه چهار ضلعی $OFAE$ مربع است. (۱)اگر ضلع این مربع x باشد داریم

$$(x+6)^2+(x+4)^2=10^2 \ (\text{نمره}1) \Rightarrow 2x^2+20x+52=100$$

$$\Rightarrow x^2+10x-24=0(0/5) \Rightarrow (x-2)(x+12)=0 \Rightarrow x=2$$

پس دوضلع قائم مثلث برابرند با ۸ و ۶ و بنابراین مساحت مثلث برابر است با ۲۴(۰/۵)

۶	در یک دور مسابقات۶ تیم A,B,C,D,E,F شرکت کردند و هر دو تیم باهم ۴ مسابقه داده اند .اگر A,B,C,D,E به ترتیب **۲۰,۳۰,۳۵,۶۰,۸۰** درصد مسابقه های خودرا برده باشند تیم F چه مقامی کسب کرده است؟	۴

حل :

وقتی ۶ تیم بخواهند دو بدو با هم بازی کنند ۱۵ بازی باید انجام بگیرد، بنابر این در این دور مسابقات ۶۰ بازی انجام شده است(۱). همچنین هر تیم $4 \times 5 = 20$ بازی انجام داده است. ب(۰/۵) ا توجه به درصد ها ی داده شده تیم های A,B,C,D,E به ترتیب ۴ و۶ و ۷ و ۱۲ و ۱۶ برد داشته اند. (۱/۵)پس تیم F تعداد $60-(16+12+7+6+4)=15$ برد داشته است و بنابراین رتبه دوم را کسب کرده است.(۱)

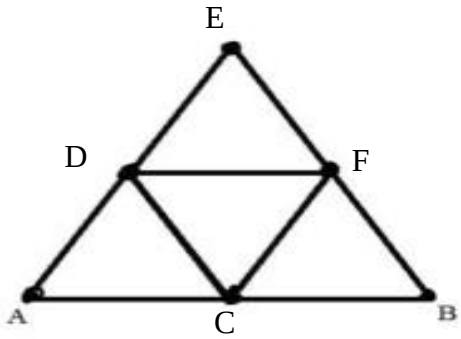
۷	اگر **abcd** ۴ عضو دو به دو متمایز از مجموعه $\{\mathbf{2}$و ... و $\mathbf{10}$و$\mathbf{8}$و$\mathbf{6}$و$\mathbf{4}$و$\mathbf{2}\}$ باشد ماکزیمم عبارت $\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}$ چقدر است؟	۴

حل :

با تفکیک کسر داده شده داریم $\frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}=\frac{1}{d}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ (۲)

بنابراین حاصل عبارت وقتی ماکزیمم است که کسرها کوچکترین مقدار ممکن باشد(۰/۵) و بنابراین اعداد مخرج باید کوچکترین مقدار ممکن یعنی ۲و۴و۶و۸ باشند(۱) و در نتیجه ماکزیمم عبارت داده شده می شود (۰/۵)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$$

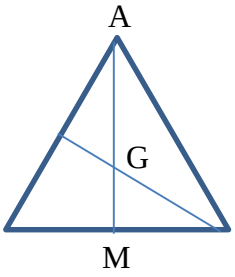
۸	در شکل زیر با حرکت روی پاره خط ها به چند طریق می توان از نقطه A به نقطه B رفت به شرطی که از هر پاره خط حداکثر یک بار عبور کنیم.  حل : **می توان با نظم و دقت ۲۳ مسیر موجود به شکل زیر را به دست آورد(۲)** **الف) مسیرهایی که اولین پاره خط طی شده AC باشد عبارتند از(۱۰ مورد)** **(۱)** ***ACB , ACFB , ACFDEFB , ACFDCB , ACFEDFB , ACFEDCB , ACDFB , ACDFCB , ACDEFB , ACDEFCB ,*** **ب) مسیرهایی که اولین پاره خط طی شده AD می باشد(۱۳ مورد)(۱)** ***ADCB , ADCFB , ADCFDEFB , ADCFEDFB , ADFB , ADFCB , ADFCDEFB , ADFEDCB , ADFEDCFB , ADEFB , ADEFDCB , ADEFCB , ADEFCDFB***	۴
۹	کلمه ی BOROUJEN را ۱۰۲۴ بار پشت سر هم می نویسیم، سپس در کلمه ی جدید بدست آمده حروف ردیف های زوج را خط می زنیم (O ، O ، J و ...)، سپس همین کار را روی کلمه ی جدید ولی از سمت راست انجام می دهیم و بار سوم مجددا این کار را از سمت چپ انجام می دهیم و به همین صورت این کار را آن قدر انجام می دهیم تا یک حرف باقی بماند، آن حرف کدام است؟ حل : در اولین مرحله تمام حروف ردیف زوج یعنی O , O , J , N ها خط می خورند (۰/۵). حال ۱۰۲۴ کلمه BRUN کنار هم چیده شده ان و در این مرحله همه حروف U , B خط می خورند(۱/۵). در مرحله سوم که عمل خط زدن از سمت چپ شروع می شود، ۱۰۲۴ کلمه RN کنار هم هستند و در این مرحله N ها خط می خورند(۱/۵). در ادامه کار همه حرف ها R هستند پس با ادامه کار حرف R می ماند. (۱/۵)	۵

۱۰	مرکز وجه های مجاور یک مکعب را به هم وصل می‌کنیم. داخل مکعب یک چند وجهی ایجاد می‌شود. برای چند وجهی حاصل هم همین را انجام می‌دهیم. این عمل را یک بار دیگر انجام می‌دهیم حجم حاصل آخرین جسم ایجاد شده چه کسری از حجم مکعب اولیه است؟	۵

حل :

در مرحله اول با وصل کردن مراکز وجوه مکعب یک ۸ وجهی منتظم با وجوه مثلث به دست می آید(دو هرم منتظم مربع القاعده در نظر بگیرید که قاعده های آنها را روی هم گذاشته اند) که طول ضلع آن برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ (a طول ضلع مکعب است). (۲)

حال اگر مراکز وجوه این هشت ضلعی منتظم را به هم وصص کنیم مجددا یک مکعب به دست می آید. ضلع این مکب برابر است با $\frac{a}{3}$ زیرا



مرکز هر وجه که یک مثلث متساوی الاضلاع است محل برخورد میانه های مثلث می باشد. دو وجه مجاور از نیمه بالایی هشت ضلعی منتظو را در نظر بگیرید. فرض کنیم در یک مرکز وجه و وسط قاعده(ضلع پایین وجه) G , M و در دیگری T , N باشند بنابراین اگر مراکز دو وجه مجاور را به هم وصل کنیم پاره خط GT به دست می آید که با توجه به خاصیت نقطه برخورد دو مینه دوسوم پاره خط MNمی باشد. اما پاره خط MN نصف قطر یک مربع به ضلع $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ می باشد بنا بر این (۲)

$$MN = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{a}{2}$$

در نتیجه ضلع مکعب جدید برابر است با $\frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{3}$ پس حجم جسم ایجاد شده $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ حجم مکب اولیه است. (۱)

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید