مرحله سوم سومین مسابقه متر (بخش کتبی)

پاسخنامه پایه هشتم

تاریخ : ۱۴۰۳/۰۵/۰۵ وقت : ۹۰ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیر توجه کنید.

۱- امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.

۲- هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.

۳- اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.

۴- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۵- این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

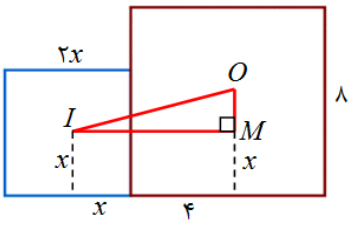
ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	منبع آبی که حاوی ۸ مترمکعب آب است دارای یک شیر ورودی است. به طوری که هر $\frac{۷}{۲۸}$ ساعت، $\frac{۱۱}{۴}$ متر مکعب آب وارد منبع می شود و دارای یک شیر خروجی است به طوری‌که سرعت خروج آب ۷/۵ متر مکعب در $\frac{۵}{۱۴}$ ساعت می‌باشد. اگر هر دو شیر همزمان باز شوند، بعداز چند ساعت منبع خالی می‌شود؟ پاسخ: x تعداد ساعتی که منبع خالی می‌شود. متر مکعب هر ساعت آب وارد منبع می‌شود $\frac{۱۱}{۴}\div\frac{۷}{۲۸}=۱۱$ متر مکعب هر ساعت خارج می‌ش.د $۷/۵\div\frac{۵}{۱۴}=۲۱$ ساعت $x=۰/۸$ $۱۰x=۸$ $۸+۱۱x-۲۱x=۰$	۲
۲	عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ مفروض است . اگر آن را با عدد ۴۸۳۰ جمع کنیم آنگاه عدد $\overline{۷b۴d}$ بدست می آید که بر ۱۵ بخش پذیر است . باقیمانده تقسیم عدد $\overline{abcd}$ بر ۹چه مقدار یا مقادیری می‌تواند باشد؟ پاسخ: $\begin{array}{r} abcd \\ +\ ۴۸۳۰ \\ \hline ۷a۴d \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c=۱ \\ a=۲ \\ b=۴ \end{cases} \Rightarrow \overline{۲۴۱d} \Rightarrow d=۵$ پس $\overline{abcd}=۲۴۱۵$ و باقیمانده ۲۴۱۵ بر ۹ برابر ۳ است.	۲

۳	۳	مقدار X را درعبارت زیر بدست آورید. $\left(۱-\frac{۲}{۲۵}\right)\left(\frac{۲}{۲۷}-۱\right)\left(۱-\frac{۲}{۲۹}\right)\ \dots\ \left(\frac{۲}{x}-۱\right)=\frac{۱}{۶۱}$ پاسخ: $\left(۱-\frac{۲}{۲۵}\right)\left(\frac{۲}{۲۷}-۱\right)\left(۱-\frac{۲}{۲۹}\right)\dots\left(\frac{۲}{x}-۱\right)=\frac{۱}{۶۱}\Rightarrow\left(\frac{۲۳}{۲۵}\right)\left(-\frac{۲۵}{۲۷}\right)\left(\frac{۲۷}{۲۹}\right)\dots\left(\frac{x-۲}{x}\right)=\frac{۱}{۶۱}$ با در نظر گرفتن y تعداد جملات منفی داریم: $(-۱)^y\left(\frac{۲۳}{۲۵}\right)\left(\frac{۲۵}{۲۷}\right)\left(\frac{۲۷}{۲۹}\right)\dots\left(\frac{x-۲}{x}\right)=\frac{۱}{۶۱}$ $\Rightarrow(-۱)^y\left(\frac{۲۳}{x}\right)=\frac{۱}{۶۱}\Rightarrow(-۱)^y=۱\ ,\ \frac{۲۳}{x}=\frac{۱}{۶۱}\Rightarrow x=۱۴۰۳$ $y=\frac{\frac{۱۴۰۳-۲۵}{۲}+۱}{۲}=\frac{۶۸۹+۱}{۲}=\frac{۷۰۰}{۲}=۳۵۰$
۴	۳	۱۲۳ مهره را تا حدامکان به دسته‌های دوتایی تقسیم می‌کنیم. و تا حد امکان با هر دو دسته‌ی دوتایی یک دسته‌ی چهارتایی درست می‌کنیم و تا حد امکان با هر دو دسته‌ی ۴ تایی یک دسته‌ی ۸ تایی درست کرده و این کار را ادامه‌می‌دهیم.در انتها چند دسته با تعداد مختلف مهره خواهیم داشت؟(هر دسته از حداقل دو مهره‌تشکیل می‌شود.) پاسخ: $۱۲۳\begin{cases}۱\\ ۱۲۲\to ۶۱\times ۲\to\begin{cases}۱\times ۲\\ ۶۰\times ۲\to ۳۰\times ۴\to ۱۵\times ۸\to\begin{cases}۱\times ۸\\ ۱۴\times ۸\to ۷\times ۱۶\to\end{cases}\end{cases}\end{cases}$ $\begin{cases}۱\times ۱۶\\ ۶\times ۱۶\to ۳\times ۳۲\end{cases}\begin{cases}۱\times ۳۲\\ ۲\times ۳۲\to ۱\times ۶۴\end{cases}$ پس در پایان یک بسته ۲ تایی و یک بسته ۸ تایی و یک بسته ۱۶ تایی و یک بسته ۳۲ تایی و یک بسته ۶۴ تایی است.
۵	۳	اگر n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد، که باقیمانده $۳n+۳۲$ بر ۱۴۰۳ برابر ۱۸ است. آنگاه باقیمانده $۶n+۶۴۹$ بر ۲۰۲۴ حساب کنید؟ پاسخ: اگر $k=۱$ کمترین مقدار n می‌باشد. $۳n+۳۲=۱۴۰۳k+۱۸$ $۳n+۳۲=۱۴۰۳\times ۱+۱۸\Rightarrow ۳n=۱۴۰۳+۱۸-۳۲\Rightarrow ۳n=۱۳۸۹\Rightarrow n=\frac{۱۳۸۹}{۳}\Rightarrow n=۴۶۳$ $۶n+۶۴۸=۶\times ۴۶۳+۶۴۹$ $=۲۷۷۸+۶۴۹$ $=۳۴۲۷$ $3427=1\times 2024+1403$

۶	در شکل مقابل، مساحت مربع بزرگ ۶۴ و فاصله ی مراکز دو مربع $۵\sqrt{۲}$ است. محیط شکل چقدر است؟	۳

پاسخ: از اینکه مساحت مربع بزرگ ۶۴ است

پس اندازهٔ هر ضلع آن برابر ۸ است.



$$\Delta OIM : \hat{M} = ۹۰^\circ \Rightarrow OI^۲ = OM^۲ = MI^۲$$

$$\left(۵\sqrt{۲}\right)^۲ = (۴-x)^۲ + (۴+x)^۲$$

$$۵۰ = ۱۶ + x^۲ - ۸x + ۱۶ + x^۲ + ۸x$$

$$۱۸ = ۲x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow ۲x = ۶$$

محیط شکل مساوی $۳\times۶ + ۳\times۸ + ۲ = ۱۸ + ۲۴ + ۲ = ۴۴$

۷	a و b و c سه عدد صحیح مثبت هستند. به طوری‌که $ac = ۲۰۲۴$ و ب. م . م a و b برابر یک است و ک.م.م c و b برابر ۱۴۰۳ است. مقدار $a-b-c$ را بیابید.	۳

پاسخ:

$۱۴۰۳ = ۲۳\times۶۱$

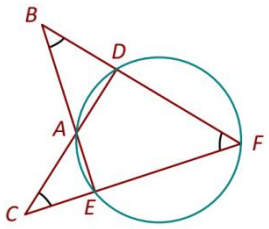
$۲۰۲۴ = ۲۳\times۸۸$

$c = ۲۳\ ,\ a = ۸۸\ ,\ b = ۶۱$

$[b,c] = ۱۴۰۳$

$a-b-c = ۴$

۸	در شکل زیر با توجه به مشخصات داده شده اندازه‌ی زاویه B را به‌دست آورید.	۳



$$\hat{F} = ۷n + ۴$$

$$\hat{B} = ۳n + ۶$$

$$\hat{C} = ۸n - ۳۴$$

پاسخ: زاویه BEC زاویه خارجی مثلث EFB است پس $B\hat{E}C = \hat{F} + \hat{B}$ و $B\hat{E}C = ۷n+۴+۳n+۶ = ۱۰n+۱۰$

زاویه DAE زاویه خارجی مثلث ACE است پس:

$$D\hat{A}E = \hat{C} + B\hat{E}C = ۸n - ۳۴ + ۱۰n + ۱۰ = ۱۸n - ۲۴$$

$\hat{F} = \frac{۱}{۲} D\hat{A}E$ محاطی است

$D\hat{A}E = \frac{۱}{۲} D\overset{\frown}{F}E$ محاطی است

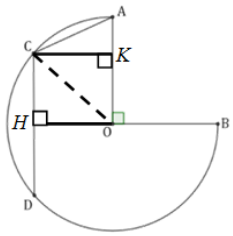
$$D\hat{A}E + \hat{F} = \frac{۱}{۲} D\overset{\frown}{F}E + \frac{۱}{۲} D\overset{\frown}{A}E = \frac{۱}{۲} \text{(دایره کامل)} = \frac{۱}{۲}\times۳۶۰ = ۱۸۰$$

$$۱۸n - ۲۴ = ۱۸۰ \qquad ۱۸n = ۲۴ + ۱۸۰ \qquad ۱۸n = ۲۰۴ \qquad n = \frac{۲۰۴}{۱۸} = \frac{۳۴}{۳}$$

$$\mathbf{18n - 24 + 7n + 4 = 180 \Rightarrow 25n = 200 \Rightarrow n = 8}$$

پس زاویه **B** برابر ۳۰ درجه است.

۹	شکل زیر، قسمتی از دایره ای به شعاع ۵ را نشان می دهد که وتر CD به طول ۶ موازی با شعاع دایره رسم شده است، اندازه وتر AC را بدست آورید.	۴



پاسخ: از O امتداد OB رسم می‌کنیم و از C عمود بر OA

$$\left.\begin{matrix} OA \| CD \\ OH \perp OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} OH \perp CD \\ CK \perp OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{H} = \hat{O} = \hat{K} = \hat{C} = ۹۰$$

پس $HCKO$ مستطیل است در نتیجه $OH = CK$ و $OK = CH$.

از اینکه امتداد شعاع بر وتر CD عمود است پس وتر را نصف می‌کند پس $CH = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$ در نتیجه $OK = ۳$ و

$$AK = ۵ - ۳ = ۲$$

$$\Delta OCH : \hat{H} = ۹۰ \Rightarrow OH^۲ = OC^۲ - CH^۲ \Rightarrow OH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ \Rightarrow OH^۲ = ۱۶ \Rightarrow$$
$$OH = ۴ \Rightarrow CK = ۴$$
$$\Delta ACK : \hat{K} = ۹۰ \Rightarrow AC^۲ = CK^۲ + AK^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۰	آپارتمانی دارای یک آسانسور با گنجایش حداکثر ۶ نفر و با قابلیت حداکثر ۴۲۰ کیلوگرم است. ۱۲ نفر از ساکنان این آپارتمان با وزن‌های متفاوت و مجموع وزن ۸۴۰ کیلوگرم به دو گروه تقسیم می‌شوند و با دوبار استفاده آسانسور از پارکینگ به طبقه پنجم می‌روند. اگر این عمل در ده روز انجام شود آیا ممکن است که گروه‌ها در هر روز با روزهای دیگر متفاوت باشند؟ (توضیح دهید)	۵

پاسخ: چون در سؤال آمده ممکن است وزن ساکنان را ۴۰ و ۴۵ و۵۰ و ۵۵ و ۶۰ و ۶۵ و ۷۵ و ۸۰ و ۸۵ و ۹۰ و ۹۵ و ۱۰۰ در نظر می‌گیریم انتخاب می کنیم که مجموع آنها ۸۴۰ کیلو گرم است و اگر آنها را در ۶ گروه ۲ نفره به صورت زیر قرار دهیم.
مجموع وزن هر سه گروه برابر ۴۲۰ کیلوگرم می‌شود و می‌توانیم آنها را به ده طریق متفاوت قرار دهیم.

A	B	C	D	E	F
۴۰	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰	۶۵
۱۰۰	۹۵	۹۰	۸۵	۸۰	۷۵

A,C,D	B,E,F
A,C,E	B,D,F
A,C,F	B,D,E

A,E,F	B,C,D

A,B,C	D,E,F
A,B,D	C,E,F
A,B,E	C,D,F
A,B,F	C,D,E

A,D,E	B,C,F
A,D,F	B,C,D

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید