ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	**در جعبه‌ای هفت کارت وجود داشت که از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده بودند. جواد به تصادف سه کارت از جعبه برداشت و بعد از او، مانی دو کارت برداشت. جواد بعد از این که کارت‌هایش را دید، به مانی گفت: می‌دانم مجموع کارت‌هایت زوج است. حاصل‌جمع عددهای روی کارت‌های جواد چه عددی است؟ راه حلتان را به طور کامل توضیح دهید.** از بین اعداد ۱ تا ۷، سه عدد فرد و چهار عدد زوج داریم. اگر هر سه کارت جواد فرد باشند، پس در بین ۴ کارت باقی مانده یک کارت فرد وجود خواهد داشت. بنابراین احتمال دارد مانی این کارت را با یک کارت زوج برداشته باشد که مجموعشان برابر با یک عدد فرد می‌شود. پس در این حالت به طور قطع نمی توان گفت که مجموع کارتهای مانی زوج است. اگر دو تا از کارت های جواد فرد باشند، پس در بین ۴ کارت باقی مانده یک کارت فرد وجود خواهد داشت. بنابراین باز هم احتمال دارد مانی این کارت را با یک کارت زوج برداشته باشد که مجموعشان برابر با یک عدد فرد می‌شود. پس در این حالت نیز به طور قطع نمی توان گفت که مجموع کارتهای مانی زوج است. اگر فقط یکی از کارت‌های جواد فرد باشد، پس در بین ۴ کارت باقی مانده سه کارت فرد و یک کارت زوج وجود خواهد داشت. بنابراین دوباره احتمال دارد جواد یک کارت فرد را با یک کارت زوج برداشته باشد پس در این حالت نیز به طور قطع نمی توان گفت که مجموع کارتهای جواد زوج است. تنها یک حالت باقی می ماند که همه کارت های جواد زوج باشد. در این صورت ۴ کارت فرد باقی می ماند. مانی هر دو تا کارتی را که انتخاب کند، حاصل جمعشان زوج می شود. د رنتیجه مجموع کارت های جواد برابر است با: ۲+۴+۶=۱۲	۳
۲	**در یک لیوان ۴۰ سی‌سی شیرقهوه وجود دارد. نسبت قهوه به شیر در آن ۴ به ۶ است. می‌خواهیم نسبت قهوه به شیر ۶ به ۸ شود.** **الف) باید چند سی‌سی قهوه به این لیوان اضافه کنیم؟** (۲ نمره) با توجه به این که می خواهیم فقط قهوه اضافه کنیم پس باید میزان شیر را ثابت نگه داریم. | مقدار جدید | نسبت جدید | مقدار | نسبت | | | ۱۸ | ۶ | ۱۶ سی سی | ۴ | قهوه | | ۲۴ سی سی | ۸ | ۲۴ سی سی | ۶ | شیر | | ۴۲ | ۱۴ | ۴۰ سی سی | ۱۰ | کل | با توجه به جدول بالا باید ۲ سی سی شیر به لیوان اضفه کنیم تذکر: ممکن است دانش آموزان به روش دیگری حل مسئله شان را صورت بندی کرده باشند (مثلا دو جدول مجزا کشیده باشند). هر پاسخ درست دیگری نیز قابل پذیرش است. در صورت عدم حل کامل، بسته به میزان پیشروی در حل مسئله، بخشی از امتیاز تعلق می گیرد.	۳

ب) در این صورت چند درصد آن، قهوه خواهد شد؟ (۲ نمره)

اکنون ۴۲ سی سی شیر قهوه داریم که نسبت قهوه به شیر در آن ۶ به ۸ است. در نتیجه ۴۲/۸ درصد آن قهوه است.

درصد	نسبت	
۴۲/۸	۶	قهوه
	۸	شیر
۱۰۰	۱۴	کل

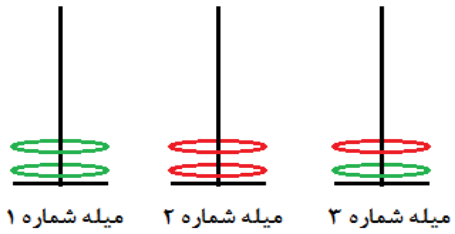
۳ (۳/۵)

در بازی پرتاب حلقه‌ها به میله‌ها، ۳ میله وجود دارد که امتیاز هر کدام مشخص است. هر نفر اجازه پرتاب ۳ حلقه را دارد. آرمیتا یک حلقه به میله شماره ۳ و دو حلقه به میله شماره ۱ پرتاب می‌کند، زهرا در پرتاب خود دو حلقه به میله شماره ۲ و یک حلقه به میله شماره ۳ پرتاب می‌کند و شادی حلقه‌هایش را به هر ۳ میله پرتاب می‌کند.

الف) اگر امتیاز آرمیتا، ۲۸ و امتیاز زهرا، ۳۴ باشد، امتیاز شادی چقدر است؟ (۲ نمره)

یک راه حل خلاقانه برای این سوال آن است که امتیاز های آرمیتا و زهرا جمع شود (با توجه به شکل زیر) و حاصل بر دو تقسیم شود:

$$28 + 34 = 62 \qquad 62 \div 2 = 31$$



اما دانش‌آموزان می‌توانند از طریق حدس و آزمایش نیز به جواب مسئله برسند:

برای مثال اگر فرض کنند امتیاز میله ۳ برای با ۱۰ است، با توجه به امتیاز آرمیتا، امتیاز میله شماره ۱ برابر با ۹ و با توجه به امتیاز زهرا، امتیاز برابر با ۱۲ می‌شود. در نتیجه امتیاز شادی برابر است با:

$$9 + 12 + 10 = 31$$

هر انتخاب معقول دیگری به جای ۱۰ به عنوان امتیاز میله شماره ۳ به همین جواب می‌رسد.

ب) آیا با دانستن امتیاز این سه نفر می‌توان امتیاز مربوط به هر میله را مشخص کرد؟ (۱/۵ نمره)

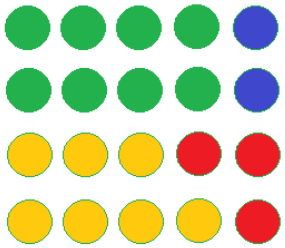
در اینجا باید دانش‌آموزان به این نکته پی ببرند که با هر انتخاب معقول برای امتیاز میله شماره ۳ به همین جواب می‌رسند. بنابراین نمی توان به طور قطع مشخص کرد امتیاز میله ها چه بوده است. برای این کار کافی است دو مثال مختلف ارائه شود.

۴ (۳)

در یک کیسه ۲۰ مهره به رنگ‌های آبی، سبز، زرد و قرمز وجود دارد. وقتی یک مهره از کیسه بیرون می‌آوریم:

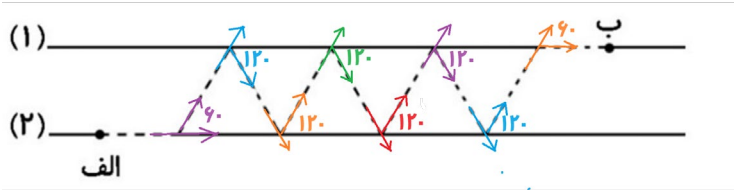
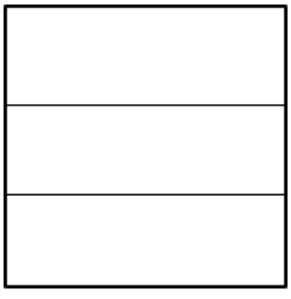
- احتمال آنکه این مهره آبی یا سبز باشد برابر است با $\frac{1}{2}$،
- احتمال آنکه این مهره آبی یا قرمز باشد برابر است با $\frac{1}{4}$،
- احتمال آنکه این مهره قرمز یا سبز باشد برابر است با $\frac{11}{20}$
- احتمال آنکه این مهره زرد یا سبز باشد برابر است با $\frac{3}{4}$.

مشخص کنید در این کیسه از هر رنگ چند تا مهره داریم.



با توجه به اطلاعات مسئله، ۱۰ تا از مهره ها آبی یا سبز هستند، ۵ تا از مهره‌ها آبی یا قرمز هستند، ۱۱ تا از مهره‌ها قرمز یا سبز هستند و ۱۵ تا از مهره‌ها زرد یا سبز هستند.

پس در این کیسه ۸ مهره سبز، ۲ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۷ مهره زرد داریم.

۵	در شکل زیر خطوط (۱) و (۲) با هم موازی هستند و همه‌ی مثلث‌ها متساوی‌الاضلاع می‌باشند. یک ربات می‌خواهد با طی کردن مسیر نقطه‌چین از نقطه‌ی الف به نقطه‌ی ب برود. اگر این ربات بدون نیاز به چرخش، حرکتش را شروع کند، برای رسیدن به نقطه پایان، باید در کل چند درجه بچرخد؟ (روی شکل اندازه‌ی چرخش‌ها را نشان دهید.) ربات برای طی کردن اولین ضلع مثلث باید راستای افقی خود را به اندازه ۶۰ درجه در جهت خلاف عقربه های ساعت تغییر دهد. در ادامه، مطابق شکل برای طی کردن هر یک از ضلع‌های مثلث ها باید ۱۲۰ درجه بچرخد و در نهایت باید ۶۰ درجه دیگر نیز بچرخد تا روی خط (۱) حرکتش را ادامه دهد.  $2 \times 60 + 6 \times 120 = 840$	۳
۶	دو اتومبیل در یک پیست دایره‌ای که برای مسابقات اتومبیل‌رانی ساخته شده است، توقف کرده‌اند. یکی از آنها با سرعت ۱۵۰ کیلومتر در ساعت و دیگری با سرعت ۱۳۵ کیلومتر در ساعت در خلاف جهت یکدیگر و همزمان شروع به حرکت می‌کنند. این دو اتومبیل پس از ۵ دقیقه به هم می‌رسند. اگر شعاع این پیست ۴/۵ کیلومتر باشد، فاصله‌ی این دو اتومبیل روی دایره پیست در ابتدا چقدر بوده است؟ (عدد پی را ۳/۱ درنظر بگیرید و راه‌حلتان را به طور کامل بنویسید.) محیط دایره پیست برابر است با: $2 \times 4.5 \times 3.1 = 27.9$ اتومبیلی که با سرعت ۱۵۰ کیلومتر در ساعت، ۵ دقیقه رانندگی می‌کنند، مسافت ۱۲.۵ کیلومتر را طی می کند. اتومبیلی که با سرعت ۱۳۵ کیلومتر در ساعت، ۵ دقیقه رانندگی می‌کنند، مسافت ۱۱.۲۵ کیلومتر را طی می کند. در نتیجه فاصله بین دو اتومبیل در ابتدا برابر بوده با: $27.9 - (12.5 + 11.25) = 4.15$ کیلومتر	۴
۷	شکل زیر، یک کتابخانه چوبی را از روبه‌رو نشان می‌دهد. این کتابخانه به شکل مربع است که به ۳ قفسه مستطیلی برابر تقسیم شده است. محیط هر مستطیل ۲۴۰ سانتی‌متر است.  الف) طول و ارتفاع هر قفسه را به دست آورید. (۱/۵ نمره) محیط هر مستطیل برابر ۲۴۰ سانتی متر است و چون طول هر مستطیل سه برابر عرض آن است پس می توان گفت عرض هر مستطیل برابر است با: ۲۴۰÷۸=۳۰ و طول آن برابر است با ۳×۳۰=۹۰ سانتی متر. در نتیجه طول هر قفسه ۹۰ سانتی متر و ارتفاع هر قفسه ۳۰ سانتی متر است	۴/۵

ب) برای نگهداری بهتر از کتاب‌ها می‌خواهیم یک درِ شیشه‌ای برای آن تهیه کنیم. در این صورت محاسبه کنید به چند مترمربع شیشه نیاز داریم؟ (۱/۵ نمره) طول یک ضلع از کتابخانه مربعی برابر با ۹۰ سانتی متر یا ۰/۹ متر است. پس مساحت آن برابر است با:

$$0.9 \times 0.9 = 0.81 \text{ متر مربع}$$

یعنی باید ۰/۸۱ متر مربع شیشه تهیه کرد.

ج) اگر عرض هر قفسه از این کتابخانه ۴۰ سانتی‌متر باشد، حساب کنید چند مترمربع چوب برای ساخت این کتابخانه استفاده شده است؟ (۱/۵ نمره) طول یک ضلع از کتابخانه مربعی برابر با ۹۰ سانتی متر یا ۰/۹ متر است. با توجه به این که عرض هر قفسه ۴۰ سانتی متر یا ۰/۴ متر است برای کف سه قفسه، سقف قفسه سوم و دیواره‌های قفسه‌ها در کل به

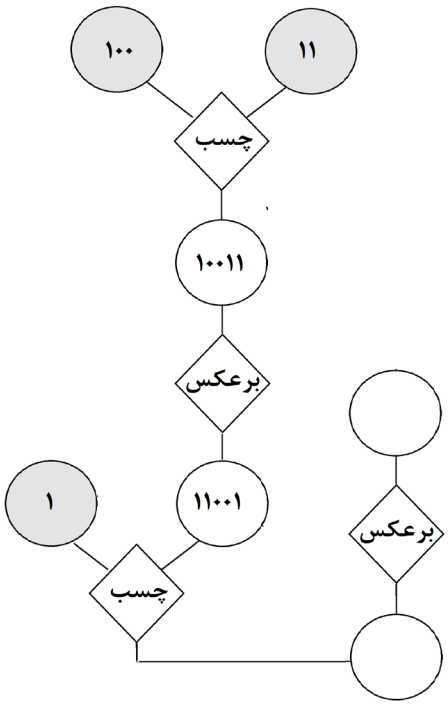
$$6 \times (0.9 \times 0.4) = 2.16 \text{ متر مربع}$$

چوب نیاز است.

۸ ج) دو نوع ماشین داریم: ماشین چسب و ماشین برعکس. ۷

ماشین چسب با گرفتن دو عدد به ترتیبی که آن اعداد را می‌گیرد آنها را از چپ به راست کنار هم قرار می دهد. ماشین برعکس، با گرفتن یک عدد، ترتیب ارقام آن عدد را برعکس می‌کند. هیچ یک از اعداد ورودی برای ماشین‌ها نمی‌توانند با رقم صفر شروع شوند.

از ترکیب این دو نوع ماشین می‌توانیم ماشین‌های ترکیبی پیچیده‌ای بسازیم. مانند ماشین زیر:



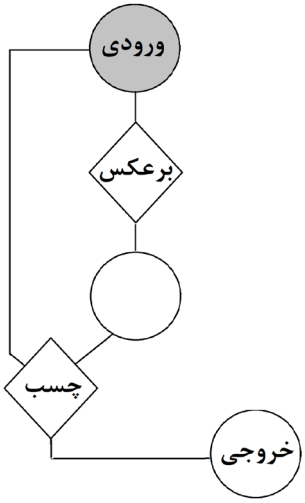
الف) خروجی ماشین ترکیبی روبه‌رو را مشخص کنید. (۱ نمره)
در اولین دایره خالی عدد ۱۱۱۰۰۱ و در دایره دوم خالی که خروجی است عدد ۱۰۰۱۱۱ باید نوشته شود

ح) در ماشین ترکیبی روبه‌رو، به جای ورودی‌های ۱۰۰، ۱۱ و ۱، سه ورودی دیگر که یکی از آنها یک عدد یک رقمی، یکی از آنها یک عدد دو رقمی و دیگری یک عدد سه رقمی است، وارد شده‌اند. خروجی این ماشین برابر با ۱۰۱۱۱۱ شده است. چه حالت‌هایی برای این سه ورودی وجود داشته است؟ (۴ نمره)
با طی کردن جهت وارونه در ماشین ترکیبی رو به رو از خروجی ۱۰۱۱۱ می‌توان به چند حالت برای ورودی‌ها دست یافت که دو حالت آخر آن قابل قبول است:

ورودی ۳	ورودی ۲	ورودی ۱
۱ غیرقابل قبول	۱۱۱	۱۰
۱ غیرقابل قبول	۱۱	۱۰۱
۱۱	۱	۱۰۱
۱۱۱	۱	۱۰

تذکر: با توجه به این در ورودی ۲، عدد ۱ باید قرار گیرد بعضی از دانش آموزان هیچ حالتی را قابل قبول ندانسته‌اند. در این صورت نیز نمره به این دانش اموزان تعلق گیرد. البته در صورتی که توضیحات مربوط به جواب را نوشته باشند. اگر صرفا نوشته اند هیچ حالتی امکان پذیر نیست فقط ۱ نمره تعلق گیرد.

خ) یک عدد را متقارن گوییم در صورتی که اگر وارد ماشین برعکس شود، تغییری در آن ایجاد نشود. یک ماشین ترکیبی طراحی کنید که هر عدد سه رقمی که به آن بدهیم، عدد خروجی آن یک عدد متقارن باشد (می‌توانید از عدد ورودی اولیه بیش از یکبار استفاده کنید).



(۲ نمره) یک جواب برای این مسئله چنین است. اما هر جواب درست دیگری نیز قابل پذیرش است.