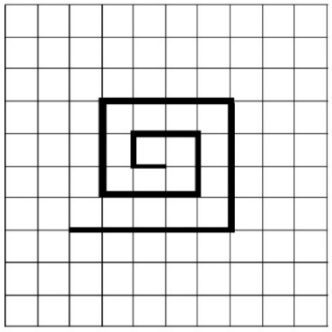
سوالات پایه چهارم **مرحله سوم مسابقه تیمی ریاضی – مردادماه ۱۴۰۳**

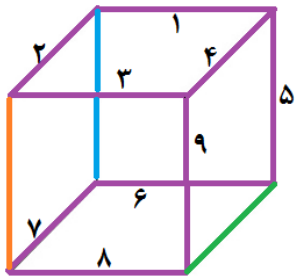
دانش‌آموزان عزیز، لطفا پاسخ سوالات را به طور کامل بنویسید.

۱. شکل زیر از ۹ پاره‌خط درست شده است و طول آن ۲۵ سانتیمتر است. طول شکلی به همین ترتیب که از ۲۱ پاره‌خط درست شده است، چند سانتیمتر می‌باشد؟ (۲ نمره)



$$2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 11 = 10 \times 11 + 11 = 121$$

۲. می‌خواهیم با کل یک سیم مسی به طول ۱۳۲ سانتیمتر اسکلت یک مکعب را مانند شکل زیر بسازیم. این سیم حداقل باید به چند قطعه تقسیم شود (نمی‌خواهیم سیم را خیلی تکه تکه کنیم)؟ طول بلندترین قطعه چقدر است؟ (چگونگی انجام کار را روی شکل زیر نشان دهید.) (۲/۵ نمره)



پیدا کردن یک خط شکسته شامل ۹ یال مکعب (۱ نمره)

در شکل یک نمونه از پاسخ‌های احتمالی دانش‌آموزان نشان داده شده است. هر پاسخ دیگری که شامل ۹ یال از مکعب باشد، درست است.

در نتیجه سیم باید به ۴ قسمت تقسیم شود (۰/۵).

پیدا کردن طول بلندترین خط شکسته (۱ نمره):

$$\text{طول ضلع مکعب } 132 \div 12 = 11$$

$$\text{سانتی متر } 11 \times 9 = 99$$

طول بلندترین قسمت از این سیم برابر است با ۹۹ سانتی متر

۳. چند عدد سه رقمی داریم که در آنها رقم ۳ به کار نرفته است؟ راه حل خود را به طور کامل توضیح دهید. (۳ نمره)

دانش‌آموزان ممکن است به چندین روش به این پرسش پاسخ داده باشد که این امر از دسته‌بندی‌های مختلف اعداد ناشی می‌شود. در زیر یک روش حل به عنوان مثال بیان می‌شود:

روش اول: کل اعداد سه رقمی ۹۰۰ تا هستند. اعداد به ۹ دسته صدتایی تقسیم میشوند: ۱۰۰ تا ۱۹۹، ۲۰۰ تا ۲۹۹، ۳۰۰ تا ۳۹۹، ۴۰۰ تا ۴۹۹، ۵۰۰ تا ۵۹۹، ۶۰۰ تا ۶۹۹، ۷۰۰ تا ۷۹۹، ۸۰۰ تا ۸۹۹ و ۹۰۰ تا ۹۹۹ (۱ نمره).

از این بین دسته سوم که همگی دارای صدگان ۳ هستند و شامل ۱۰۰ عدد است باید کار گذاشته شود (۰/۵).

از ۸ دسته باقی مانده، هر دسته نیز به ۱۰ دسته ده تایی تبدیل می‌شود که ۹ تا از دسته ها دارای فقط رقم یکان ۳ هستند و یک دسته ۱۰ تایی رقم دهگان ۳ دارد. یعنی ۱۹ عدد رقم ۳ را یا در دهگان یا در یکان و یا در هر دو رقم دارند (۱ نمره).

درنتیجه تعداد اعداد سه رقمی بدون رقم ۳ برابر است با (۰/۵):

$$900 - (100 + 8 \times 19) = 648$$

تذکر: بسته به پیشرفت دانش‌آموزان در روند حل مسئله برای راه حل های دیگر نیز همه یا بخشی از ۳ نمره کل به آنها تعلق گیرد.

۴. کارگری در روز اول $\frac{2}{3}$ کاری را انجام می‌دهد. او در روز دوم به اندازه $\frac{1}{3}$ روز قبل کارش را انجام می‌دهد.

الف) در پایان روز دوم چقدر از کل کار باقی می‌ماند؟ (۱/۵ نمره)



دانش‌آموزان می‌توانند از روی شکل یا به کمک ضرب کسرها (محاسبه) به مسئله پاسخ دهند:

روش اول (با کمک شکل): با توجه به شکل رو به رو $\frac{1}{9}$ از کار باقی مانده است.

روش دوم (با کمک محاسبه):

کار انجام شده در روز اول: $\frac{2}{3}$

کار انجام شده در روز دوم:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

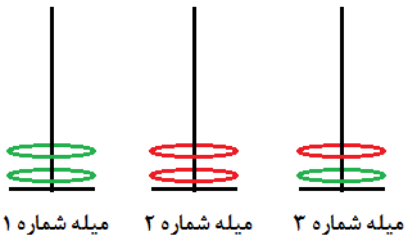
کار باقی مانده:

$$1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

ب) اگر سرعت انجام کار این کارگر یکسان باشد و در روز اول کارش را در ۴/۵ ساعت تمام کرده باشد، کل کار او در چه مدت زمانی به پایان می‌رسد؟ (۱/۵ نمره)

با توجه به شکل اگر کل کار به ۹ قسمت مساوی تقسیم شود، ۶ قسمت آن در ۴/۵ ساعت انجام شده است. یعنی هر قسمت از این کار ۴۵ دقیقه طول کشیده است (می توان به طور مشابه گفت اگر کل کار به ۳ قسمت مساوی تقسیم شود، ۲ قسمت آن در ۴/۵ ساعت انجام شده است. یعنی هر قسمت از این کار ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه طول کشیده است). در نتیجه کل کار در ۶ ساعت ۴۵ دقیقه انجام می‌شود.

۵. در بازی پرتاب حلقه‌ها به میله‌ها، ۳ میله وجود دارد که امتیاز هر کدام مشخص است. هر نفر اجازه پرتاب ۳ حلقه را دارد. آرمیتا یک حلقه به میله شماره ۳ و دو حلقه به میله شماره ۱ پرتاب می‌کند، زهرا در پرتاب خود دو حلقه به میله شماره ۲ و یک حلقه به میله شماره ۳ پرتاب می‌کند و شادی حلقه‌هایش را به هر ۳ میله پرتاب می‌کند.



الف) اگر امتیاز آرمیتا، ۲۸ و امتیاز زهرا، ۳۴ باشد، امتیاز شادی را به دست آورید؟ (۲ نمره)

یک راه حل خلاقانه برای این سوال آن است که امتیاز های آرمیتا و زهرا جمع شود (با توجه به شکل زیر) و حاصل بر دو تقسیم شود:

$$28 + 34 = 62 \qquad 62 \div 2 = 31$$

اما دانش‌آموزان می‌توانند از طریق حدس و آزمایش نیز به جواب مسئله برسند:

برای مثال اگر فرض کنند امتیاز میله ۳ برای با ۱۰ است، با توجه به امتیاز آرمیتا، امتیاز میله شماره ۱ برابر با ۹ و با توجه به امتیاز زهرا، امتیاز برابر با ۱۲ می‌شود. در نتیجه امتیاز شادی برابر است با:

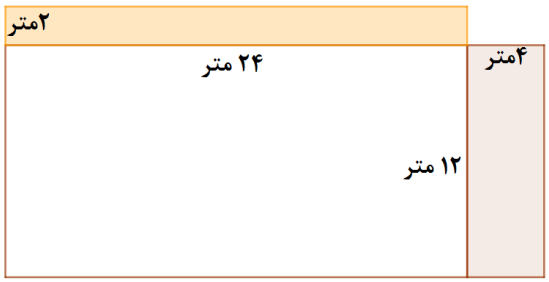
$$9 + 12 + 10 = 31$$

هر انتخاب معقول دیگری به جای ۱۰ به عنوان امتیاز میله شماره ۳ به همین جواب می‌رسد.

ب) آیا با دانستن امتیاز این سه نفر می‌توان امتیاز مربوط به هر میله را مشخص کرد؟ (دلیل خود را توضیح دهید.) (۱/۵ نمره)

در اینجا باید دانش‌آموزان به این نکته پی ببرند که با هر انتخاب معقول برای امتیاز میله شماره ۳ به همین جواب می‌رسند. بنابراین نمی توان به طور قطع مشخص کرد امتیاز میله ها چه بوده است. برای این کار کافی است دو مثال مختلف ارائه شود.

۶. دور باغچه‌ای مستطیل شکل به طول ۲۴ متر و عرض ۱۲ متر طناب کشیده‌ایم. می‌خواهیم با جابه‌جا کردن یکی از اضلاع مستطیل، مساحت باغچه را ۴۸ مترمربع زیادتر کنیم (دقت کنید که در این صورت اندازه ۲ ضلع دیگر مستطیل هم افزایش می‌یابد).
حداقل چند متر طناب اضافی برای باغچه مستطیلی بزرگ شده نیاز داریم؟ (مقداری طناب نیز برای گره زدن طناب‌ها درنظر بگیرید). (۳ نمره)



دو حالت برای این کار وجود دارد، جابجا کردن طول مستطیل (که منجر به افزایش عرض می شود) و جابجا کردن عرض مستطیل (که منجر به افزایش طول می شود). دانش‌آموزان باید هر دو حالت را بررسی کرده و ببینند در هر حالت چقدر طناب بیشتری نیاز دارند.

حال اول: جابجا کردن طول مستطیل
در این صورت چون طول ثابت است باید عرض به اندازه ۲=۲۴÷۴۸ متر بلندتر شود. پس طناب لازم برای این افزایش مساحت برابر است با ۴ متر. با توجه به این که این طناب باید به طناب قبلی ۲ گره بخورد، با درظر گرفتن ۳۰ سانتی متر برای هر گره، باید ۲ متر و ۶۰ سانی متر طناب تهیه شود.

حال دوم: جابجا کردن عرض مستطیل
در این صورت چون عرض ثابت است باید عرض به اندازه ۴=۱۲÷۴۸ متر بلندتر شود. پس طناب لازم برای این افزایش مساحت برابر است با ۸ متر. با توجه به این که این طناب باید به طناب قبلی ۲ گره بخورد، با درظر گرفتن ۳۰ سانتی متر برای هر گره، باید ۴ متر و ۶۰ سانی متر طناب تهیه شود.

تذرکر: هر مقداری معقول دیگری برای گره زدن طناب قابل پذیرش است.

۷. قیمت یک آبنبات چوبی، ۱۲۰۰ تومان، قیمت دو آبنبات چوبی، ۲۱۰۰ تومان، قیمت چهار آبنبات چوبی، ۴۰۰۰ تومان، قیمت هشت آبنبات چوبی، ۷۲۰۰ تومان و قیمت شانزده آبنبات چوبی، ۱۴۰۰۰ تومان است.
الف) کمترین مقدار پول لازم برای خرید ۳۹ آبنبات چوبی چقدر است؟ (می‌توانید بیش از آنچه نیاز دارید آبنبات چوبی بخرید و به دوستانتان نیز بدهید!) (۱/۵ نمره)
با خرید دو بسته آبنبات ۱۶ تایی و یک بسته آبنبات ۸ تایی کمترین هزینه انجام می شود:

$$2 \times 14000 + 7200 = 35200$$ تومان

در این صورت می‌توان ۱ آبنبات اضافه به دست آورد. هر انتخابی به جز این منجر به افزایش قیمت خرید می‌شود.
تذکر: برای انتخاب (نادرست) زیر می توان ۰/۵ به دانش‌آموزان داده شود.

$$2 \times 14000 + 4000 + 2100 + 1200 = 35300$$ تومان

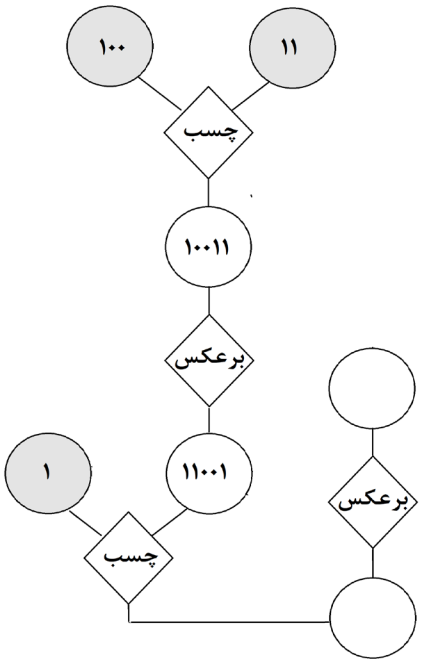
ب) فکر می‌کنید چرا فروشنده، آبنبات‌ها را به این صورت قیمت‌گذاری کرده است؟ (۱ نمره)
هر دلیل موجهی از جمله کم کردن سود فروشده برای ترغیب خریداران به این که تعداد بیشتری آبنبات بخرند، قابل پذیرش است.

۸. دو نوع ماشین داریم: ماشین چسب و ماشین برعکس.

ماشین چسب با گرفتن دو عدد به ترتیبی که آن اعداد را می‌گیرد آنها را از چپ به راست کنار هم قرار می دهد. ماشین برعکس، با گرفتن یک عدد، ترتیب ارقام آن عدد را برعکس می‌کند. هیچ یک از اعداد ورودی برای ماشین‌ها نمی‌توانند با رقم صفر شروع شوند.

از ترکیب این دو نوع ماشین می‌توانیم ماشین‌های ترکیبی پیچیده‌ای بسازیم.

مانند ماشین زیر:



الف) خروجی ماشین ترکیبی روبه‌رو را مشخص کنید. (۱ نمره)

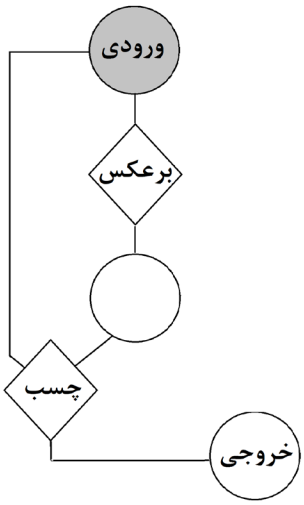
در اولین دایره خالی عدد ۱۱۱۰۰۱ و در دایره دوم خالی که خروجی است عدد ۱۰۰۱۱۱ باید نوشته شود

ب) در ماشین ترکیبی روبه‌رو، به جای ورودی‌های ۱۰۰، ۱۱ و ۱، سه ورودی دیگر که یکی از آنها یک عدد یک رقمی، یکی از آنها یک عدد دو رقمی و دیگری یک عدد سه رقمی است، وارد شده‌اند. خروجی این ماشین برابر با ۱۰۱۱۱ شده است. چه حالت‌هایی برای این سه ورودی وجود داشته است؟ (۴ نمره)

با طی کردن جهت وارونه در ماشین ترکیبی رو به رو از خروجی ۱۰۱۱۱ می‌توان به چند حالت برای ورودی‌ها دست یافت که دو حالت آخر آن قابل قبول است:

ورودی ۳	ورودی ۲	ورودی ۱
۱ غیرقابل قبول	۱۱۱	۱۰
۱ غیرقابل قبول	۱۱	۱۰۱
۱۱	۱	۱۰۱
۱۱۱	۱	۱۰

تذکر: با توجه به این در ورودی ۲، عدد ۱ باید قرار گیرد بعضی از دانش آموزان هیچ حالتی را قابل قبول ندانسته‌اند. در این صورت نیز نمره به این دانش اموزان تعلق گیرد. البته در صورتی که توضیحات مربوط به جواب را نوشته باشند. اگر صرفا نوشته اند هیچ حالتی امکان پذیر نیست فقط ۱ نمره تعلق گیرد.



ت) یک عدد را متقارن گوییم در صورتی که اگر وارد ماشین برعکس شود، تغییری در آن ایجاد نشود. یک ماشین ترکیبی طراحی کنید که هر عدد سه رقمی که به آن بدهیم، عدد خروجی آن یک عدد متقارن باشد (می‌توانید از عدد ورودی اولیه بیش از یکبار استفاده کنید). (۲ نمره)

یک جواب برای این مسئله چنین است. اما هر جواب درست دیگری نیز قابل پذیرش است.