مرحله سوم مسابقه متر (بخش کتبی)

دومین دوره –پاسخنامه پایه دهم(۱۰)

تاریخ : ۱۴۰۲/۰۵/۱۴ وقت : ۱۲۰

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۵ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.

۲- هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.

۳- اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.

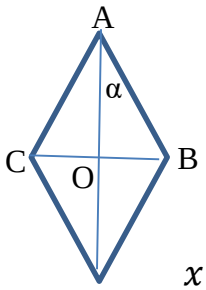
۴- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۵- این آزمون شامل ۸ سؤال می باشد که در ۳ صفحه تنظیم شده است.

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	توپی را از بالای یک برج به ارتفاع۳۰متر به هوا پرتاب می‌کنیم اگر ارتفاع توپ از سطح زمین در ثانیه tاز رابطه $h(t)=-۵t^۲+۲۰t+۳۰$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی ارتفاع توپ از سطح زمین کمتر از ۴۵ متر نیست؟ پاسخ : $-۵t^۲+۲۰t+۳۰\geq ۴۵\Rightarrow -۵t^۲+۲۰t-۱۵\geq ۰$ t: ۰ ، ۱ ، ۳ h: − ۰ + ۰ − مجموعه جواب $=[۱,۳]$	۲
۲	معادله تابع قطعه‌ای(خطی و سهمی) f ، با نمودار مقابل را به دست آورید. پاسخ : $f(x)=\begin{cases}-(x+۱)^۲+۲ & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ x-۱ & ۰<x<۲\\ ۱ & x\geq ۲\end{cases}$	۳
۳	چند عدد وجود دارد که هر کدام از آن ها مقسوم علیه حداقل یکی از اعداد 12^6 و 180^3 می باشند. پاسخ : $\mathbf{12^6=(2^2\times 3)^6=2^{12}\times 3^6\,,180^3=(2^2\times 3^2\times 5)^3=2^6\times 3^6\times 5^3}$ اگر $A\,,B$ مجموعه مقسم علیه های 12^6 و 180^3 باشند آنگاه چون ب م م 12^6 و 180^3 برابر است با $2^6\times 3^6$ پس داریم $\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=7\times 7\times 4+13\times 7-7\times 7=238}$	۳

۴	بیماری داروی A را هر سه ساعت یکبار و داروی B را هر۵ ساعت یکبار مصرف می‌کند. او مصرف هر دو دارو را ساعت ۷ صبح روز ۲۷ شهریورماه آغاز می‌کند و پس از آن مصرف داروها را به صورت منظم ادامه می‌دهد. مشخص کنید تا پایان روز دوم آبان‌ماه این بیمار چندبار هر دو دارو را با هم مصرف نموده‌است. پاسخ : تعداد کل روزها $= ۵ + ۳۰ + ۲ = ۳۷$ تعداد کل ساعت‌ها $= ۳۷ \times ۲۴ = ۸۸۸$ دنباله ساعت‌هایی که هردو دارو با هم مصرف می‌شوند: $۷, ۲۲, ۳۷, ۰۰۰$ جمله عمومی: $t_n = ۷ + (n-۱)۱۵ = ۱۵n - ۸$ $۱۵n - ۸ \le ۸۸۸ \Rightarrow n \le \frac{۸۹۶}{۱۵} \approx ۵۹/۸ \overset{n \in N}{\Rightarrow\Rightarrow} n = ۵۹$	۳
۵	حاصل جمع تمام اعداد ۴ رقمی که با ارقام عدد ۱۴۰۲ ساخته می شوند چقدر است؟ (تکرار مجاز است) پاسخ : با ارقام ۱و۴و۰و۲ تعداد۱۹۲ = ۴×۴×۴×۳ عدد می توان نوشت. در رقم های یکان این اعداد از هر کدام از رقم ها ۴۸ تا داریم پس جمع رقم های یکان برابر است با ۳۳۶ =۴۸×(۱+۴+۰+۲) حاصل جمع رقم های دهگان و صدگان نیز به همین صورت است. اما در رقم هزارگان از هر رقم ۶۴ تا داریم پس جمع رقم های هزارگان می شود ۴۴۸ =۶۴×۷ پس حاصل جمع همه این اعداد می شود 336+3360+33600+448000 = 485296	۳
۶	در یک لوزی، طول هر ضلع واسطه ی هندسی بین طولهای دو قطر است. اندازه زاویه های لوزی را حساب کنید.  پاسخ : اگر قطرهای لوزی را 2x , 2y بگیریم طول ضلع لوزی برابر $2\sqrt{xy}$ می شود حال به سه روش نشان می دهیم که زاویه های لوزی برابر ۳۰ و ۱۵۰ درجه می باشند . روش اول : $x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{xy}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\frac{x}{y} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow$ $\frac{x}{y} = 2 \pm \sqrt{3}$ $\Rightarrow \tan\alpha = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 15$ روش دوم : در مثلث AOB ارتفاع وارد بر وتر برابر است با $\frac{xy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{xy}$ پس ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است و لذا یک زاویه مثلث ۱۵ درجه است روش سوم : مساحت مثلث ABC را از دو روش حساب می کنیم. $2S = xy = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{xy}\right)\left(2\sqrt{xy}\right)\sin A \rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \rightarrow A = 30$	۴

۷	عبارات زیر را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنید. $(2x^2+4x-1)(4x^2+8x-7)+3$ x^5+x+1 **پاسخ :** $2x^2+4x=y \rightarrow (2x^2+4x-1)(4x^2+8x-7)+3=$ $(y-1)(2y-7)+3=2y^2-9y+10=(y-2)(2y-5)$ $=(2x^2+4x-2)(4x^2+8x-5)$ $=2(x^2+2x-1)(2x-1)(2x+5)$ $x^5+x+1=x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2+x+1=$ $x^5+x^4+x^3-x^4-x^3-x^2+x^2+x+1$ $=x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+x^2+x+1$ $=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$ **هر قسمت ۲/۵ نمره**	۵
۸	الف) عددی مثال بزنید که حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی و همچنین حاصل ضرب ۵ عدد طبیعی متوالی است ب)تابت کنید هیچ عددی نمی تواند حاصل ضرب ۲ و در عین حال حاصلضرب ۴ عدد طبیعی متوالی باشد. **پاسخ : الف) مثلا ۱×۲×۳×۴=۵×۴×۳×۲×۱=۶×۵×۴×۳** **ب) فرض کنیم $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$ در این صورت داریم** $m(m+1)+1=n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \rightarrow m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2$ **اما این تساوی غیر ممکن است زیرا برای عدد طبیعی m عبارت m^2+m+1 بین دو مربع کامل m^2 و m^2+2m+1 است و نمی تواند مربع کامل باشد** **الف ۱ نمره- ب ۴ نمره**	۵

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید