مرحله سوم مسابقه متر (بخش کتبی)

دومین دوره –پاسخنامه پایه هشتم

تاریخ : ۱۴۰۲/۰۵/۱۴ وقت : ۱۲۰ دقیقه

شورای خانه های ریاضیات ایران

MTC Mathematicas Team Competition مسابقه تیمی ریاضی متر

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در دومین دوره مسابقه متر و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیر توجه کنید.

۱- **امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.**

۲- **هر تیم باید یک پاسخنامه تحویل دهد.**

۳- **اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.**

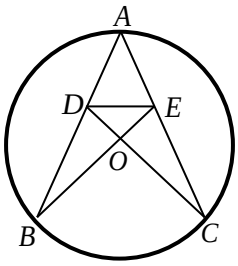
۴- **استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

۵- **این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۳ صفحه تنظیم شده است.**

خانه ریاضیات شهر : .....

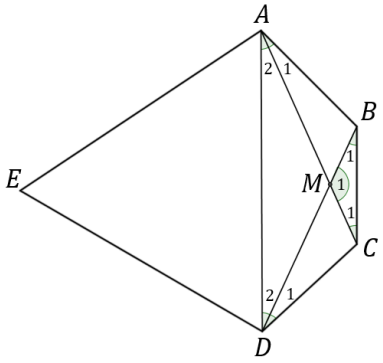
مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	چند عدد دو رقمی داریم که حاصل ضرب ارقام آنها به اضافه حاصل جمع ارقام آنها برابر با خود عدد شود؟ **پاسخ : فرض کنیم عدد مورد نظر $\overline{xy}$ باشد. در** $$xy + x + y = \overline{xy} = 10x + y \Rightarrow xy - 9x = 0 \Rightarrow x(y-9) = 0$$ **چون x نمی تواند صفر باشد پس $y - 9 = 0$ و در نتیجه $y = 9$ لذا ۹ عدد ۱۹و۲۹و۳۹و...و۹۹ شرط مساله را دارند**	۲
۲	در الگوی اعداد زیر، مجموع صد جمله اول را بدست آورید. ..... و۶- و ۱– و ۵ و ۶ و ۱ **پاسخ : در این الگو از عدد سوم به بعد، هر عدد تفریق دو عدد قبل از خودش می باشد(مثلا ۱-۶=۵). حال اگر چند عدد دیگر الگو را بنویسیم الگو تکراری می شود.** .....و۵و۶ و۱ و ۵- و۶- و ۱– و ۵ و ۶ و ۱ **پس حاصل جمع صد جمله اول الگو می شود** $$16 \times (1 + 6 + 5 - 1 - 6 - 5) + 1 + 6 + 5 - 1 = 0 + 11 = 11$$	۲
۳	**علی ۲۰ عدد طبیعی را روی تخته نوشته که مجموع آنها برابر ۴۲۰ است. علی از حسن می‌خواهد دو تا از عددها را پاک کند و در عوض حاصل جمع آن دو عدد منهای یک را روی تخته بنویسد. در مرحلهٔ دوم از حسن می‌خواهد ۲ تا از آنها را پاک کند و در عوض حاصل جمع آن دو عدد منهای ۲ را جایگزین کند. در مرحله سوم از حسن می‌خواهد ۲ تا از عددهای روی تخته را پاک کند و به جای آنها حاصل جمع دو عدد منهای ۳ را قرار دهد و این عمل را ادامه دهد. تا فقط یک عدد روی تخته بماند. عدد باقیمانده را تعیین کنید.** **پاسخ: ۱۹ مرحله این عمل انجام می شود بنابراین عدد باقیمانده می شود** $$۴۲۰ - ۱ - ۲ - ۳ \ldots - ۱۹ = ۴۲۰ - (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۱۹) = ۴۲۰ - ۱۹۰ = ۲۳۰$$	۲

۴	در غربال اراتستن برای مشخص کردن اعداد اول کمتر از ۵۳۰۰ ، حاصل جمع ۴ عددی که دیرتر از همه خط می خورند چقدر است؟ **پاسخ : بزرگترین عدد اول کوچکتر از جذر ۵۳۰۰ عدد ۷۱ است. دو عددی که آخر خط می خورند $71\times 73=5183$ و $71\times 71=5041$ می باشند. دو عدد دیگر هم مضرب های ۶۷ هستند یعنی $67\times 73=4891$ و $67\times 79=5293$ که حاصل جمع آنها می شود** $$5183+5041+4891+5293=20408$$	۲
۵	چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ وجود دارد به طوری که حاصل ضرب مقسوم‌علیه‌های کوچکتر از خود عدد مساوی خود عدد شود؟ **پاسخ : به سادگی دیده می شود اعدادی این خاصیت را دارند که درست ۴ مقسو علیه داشته باشند. پس این اعداد یا باید به صورت حاصل ضرب دو عدد اول متفاوت باشند و یا توان سوم یک عدد اول باشند.** **۳۰ عدد دراز گروه اول داریم $\underbrace{2\times 47,\ldots,2\times 3}_{14}$ و $\underbrace{3\times 5,3\times 7,\ldots,3\times 31}_{9}$ و هفت مورد دیگر.** **اما در گروه دوم فقط دو عدد ۸ و ۲۷ را داریم پس روی هم ۳۲ عدد کمتر از ۱۰۰ با ویژگی بالا وجود دارد.**	۲
۶	در شکل مقابل نقطه ی O مرکز دایره است و $B\hat{A}C=C\hat{D}E=\alpha$ و $A\hat{D}E=۲B\hat{A}C=۲\alpha$. اگر بتوان دایره‌ای رسم کرد که از نقاط B , C , D , E بگذرد،زاویه $B\hat{A}C$ چند درجه است  پاسخ : اولاً زاویه مرکز BOC دو برابر زاویه محاطی A می‌باشد. پس $B\hat{O}C=۲\alpha$ $$\left.\begin{array}{l}\Delta ODE: O\hat{E}D=۱۸۰-(۲\alpha+\alpha)=۱۸۰-۳\alpha\\ \Delta ADE: A\hat{E}D=۱۸۰-(\alpha+۲\alpha)=۱۸۰-۳\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{E}B=۳۶۰-۶\alpha$$ $$B\hat{E}C=۱۸۰-(۳۶۰-۶\alpha)=۶\alpha-۱۸۰$$ $$B\hat{D}C=۱۸۰-(\alpha+۲\alpha)=۱۸۰-۳\alpha$$ چون می‌توان دایره‌ای رسم کرد که از نقاط B , C , D , E بگذرد پس $B\hat{D}C=B\hat{E}C$ در نتیجه: $$۶\alpha-۱۸۰=۱۸۰-۳\alpha\Rightarrow ۹\alpha=۳۶۰\Rightarrow\alpha=۴۰$$	۳
۷	بین اعداد ۱و۲و۳و...و۱۴۰۲ چند عدد داریم که مجموع ارقام آنها ۹ است و چند عدد داریم که مجموع ارقام آنها ۱۸ است؟ **پاسخ : ۱۰ عدد یک رقمی دورقمی داریم که مجموع ارقام ۹ دارند (۰۹و۱۸و۲۷و...و۹۰).حال چون ۹ عدد یک رقمی و دو رقمی داریم که مجموع ارقام ۸ دارند(۰۸و۱۷و۲۶و...و۸۰) پس ۹ عدد سه رقمی از ۱۰۰ تا ۱۹۹ داریم که مجموع ارقام آنها ۹ است. با ادامه این روش از یک تا ۹۹۹ تعداد ۱+۲+...+۱۰یعنی ۵۵ عدد داریم که مجموع ارقام آنها ۹ است.** **از ۱۰۰۰ تا ۱۴۰۲ هم ۶+۷+۸=۹=۳۰عدد داریم پس پاسخ قسمت اول ۸۵ است.** **برای قسمت دوم گوییم از ۱ تا۱۴۰۲ تعداد ۱۵۵مضرب ۹ داریم مجموع ارقام آنها ۹یا ۱۸ یا ۲۷ است و چون فقط مجموع ارقام ۹۹۹ برابر ۲۷ است پس جواب قسمت دوم ۶۹= ۸۶-۱۵۵ است**	۳

۸	در پنج ضلعی $ABCDE$ داریم؛ $\hat{B}=\hat{C}=120^\circ$ و $AB=BC=CD=6$ و $DE=EA=15$. مساحت پنج ضلعی را حساب کنید.	۳

پاسخ :



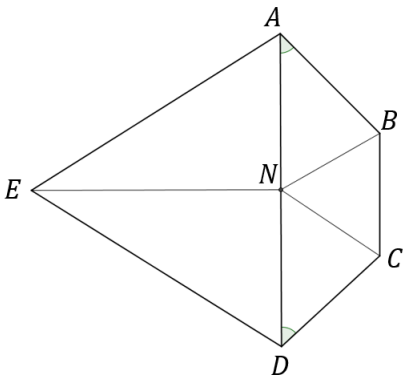
ابتدا A را به D و به C وصل می کنیم، بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است، پس $\widehat{A_1}=\widehat{C_1}=30^\circ$ است. همین طور B را به D وصل می کنیم، پس $\widehat{B_1}=\widehat{D_1}=30^\circ$ است. پس مثلث BMC متساوی الساقین است و داریم $\widehat{M_1}=120^\circ$ است.

$$\left.\begin{array}{l}AB=CD\\BC=BC\\\hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}ABC\cong BCD\implies AC=BD\Bigg\}\implies AM=MD$$
$$BMC \text{ متساوی الساقین} \implies BM=MC$$

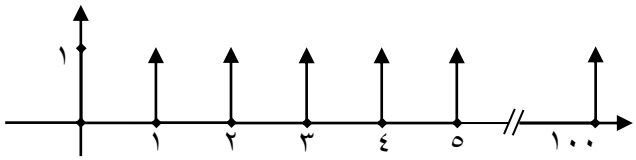
بنابراین مثلث AMD نیز متساوی الساقین است، پس

$$\widehat{A_2}=\widehat{D_2}=30^\circ\implies \widehat{DAB}=\widehat{ADC}=60^\circ$$

در مثلث متساوی الساقین AED ، میانه EN را رسم می کنیم که ارتفاع نیز است.



$$EN^2=15^2-6^2=225-36=189\implies EN=\sqrt{189}$$
$$S_{ABCDE}=S_{AED}+3S_{ABN}=$$
$$\frac{1}{2}\times AD\times EN+3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times AB^2=$$
$$\frac{1}{2}\times 12\times\sqrt{189}+3\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=18\sqrt{21}+27\sqrt{3}$$

۹	آیا می توان اعداد ۱ تا ۱۳ به جز یکی از آنها را در یک جدول ۴ در ۳ طوری قرار دهید که حاصل جمع اعداد همه سطرها با هم و حاصل جمع اعداد تمام ستون ها نیز با هم برابر شود. **پاسخ :** یک شرط لازم برای انجام این کار آن است که مجموع اعداد جدول بر ۳ و ۴ بخش پذیر باشد . پس باید عددی را حذف کنیم که مجموع بقیه اعداد مضرب ۱۲ باشد. $1+2+\cdots+13=91$ باقیمانده ۹۱ بر ۱۲ برابر است با ۷ پس عدد ۷ باید حذف شود. با حذف عدد ۷ این کار شدنی است. یک نمونه به صورت زیر است ۳ ۱۲ ۱۱ ۲ ۵ ۸ ۶ ۹ ۱۳ ۱ ۴ ۱۰	۴
۱۰	در شکل زیر ۱۰۰ بردار واحد رسم شده است . علی در مرحله اول تمام بردارها را ۹۰درجه به چپ می چرخاند. در مرحله دوم تمام بردارهای ابتدا از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲n\\۰\end{bmatrix}$ هستند را ۹۰درجه به چپ می‌چرخاند. در مرحله سوم بردارهایی که ابتدا از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۳n\\۰\end{bmatrix}$ هستند را ۹۰ درجه به چپ می چرخاند. در مرحله چهارم تمام بردارهایی که ابتدا از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۴n\\۰\end{bmatrix}$ هستند را ۹۰درجه به چپ می چرخاند.این عمل را ادامه می دهد و در آخر بردار ابتدا ازنقطهٔ $\begin{bmatrix}۱۰۰n\\۰\end{bmatrix}$ را ۹۰ درجه به چپ می چرخاند. در پایان مجموع بردارهایی که به صورت افقی هستند را به دست آورید.  **پاسخ :** با دقت و بررسی متوجه می‌شویم بردارهایی در پایان افقی هستند که به تعداد فرد چرخانده‌شده باشند. اولاً باید بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ شمارندهٔ آنها فرد است را انتخاب کنیم. اعداد $۱, ۲^۲, ۳^۲, ۲^۲\times۳^۲, ۵^۲, ۲^۲\times۵^۲, ۷^۲, ۲^۴, ۳^۴, ۲^۶$ دارای شمارندهٔ فرد هستند. ثانیاً: این اعداد را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: الف)عددهایی که تعداد شمارندهٔ آنها به صورت $(۴m-۱)$ شامل $۱, ۲^۲, ۳^۲, ۵^۲, ۷^۲, ۲^۶$ ب)عددهایی که تعداد شمارندهٔ آنها به صورت $(۴m-۳)$ شامل $۱, ۲^۴, ۳^۴, ۲^۲\times۳^۲, ۲^۲\times۵^۲$ بردارهایی که ابتدای آنها روی نقطهٔ $\begin{bmatrix}۴m-۱\\۰\end{bmatrix}$ هستند بردار واحد با طول $+۱$ می‌باشند. پس مجموع آنها $+۵$ و بردارهایی که ابتدای آنها روی نقطهٔ $\begin{bmatrix}۴m-۳\\۰\end{bmatrix}$ هستند بردار واحد با طول -۱ می‌باشند. پس مجموع آنها -۵ می‌شود. بنابراین مجموع بردارها صفر می‌شود.	۵