مرحله سوم دوّمین مسابقه متر (بخش کتبی)

پاسخنامه پایه هفتم

تاریخ : ۱۴۰۲/۰۵/۱۴ وقت : ۱۲۰

دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.

۲- هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.

۳- اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.

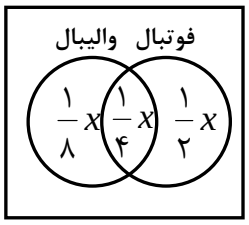
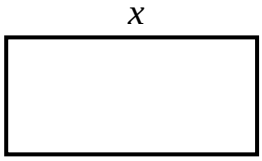
۴- استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۵- این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	احمد سه نوع شکلات دارد از نوع اول ۴۸ تا و از نوع دوم ۷۲ تا و از نوع سوم ۲۴۰ تا. او بسته‌هایی مثل هم درست کرد و در هر بسته از هر ۳ نوع شکلات قرار داد و هیچ شکلاتی اضافه نیاورد. او حداکثرچند بسته درست کرده است؟ جواب: ب م م ۴۸ و ۷۲ و ۲۴۰ عبارت است از $۴۸ = ۲^۴ \times ۳$ $۷۲ = ۳^۲ \times ۲^۳$ $۲۴۰ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵$ $۲^۳ \times ۳ = ۸ \times ۳ = ۲۴$ (ب م م سه عدد) احمدحداکثر ۲۴ بسته درست کرده است.	۲
۲	روی ۱۰ کارت یکی از عددهای ۸ یا ۹ را نوشته‌ایم. مجموع عددهای روی تمام کارت‌ها بر ۱۱ بخش‌پذیر است. روی چند کارت عدد ۹ را نوشته‌ایم؟ جواب: ۸ تا $۸ \times ۹ + ۲ \times ۸ = ۸۸$ $۸۸ = ۸ \times ۱۱$	۲
۳	در شکل روبه‌رو $\overline{AD} = \overline{AC} = ۴$ و مساحت مثلث ADC مساوی ۸ است. اگر $\hat{A} + \hat{B} = ۲\hat{C}$ اندازه زاویه $D\hat{C}B$ را بیابید. جواب: با توجه به اینکه $\frac{AD \times AC}{۲} = \frac{۴ \times ۴}{۲} = ۸$ پس $\hat{A} = ۹۰$, $A\hat{D}C = A\hat{C}D = ۴۵$، در نتیجه $\hat{B} + \hat{C} = ۹۰$ $\hat{A} + \hat{B} = ۲\hat{C} \Rightarrow ۹۰ + \hat{B} = ۲\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = ۲\hat{C} - ۹۰$ $\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = ۹۰ \\ \hat{B} = ۲\hat{C} - ۹۰ \end{cases} \Rightarrow ۲\hat{C} - ۹۰ + \hat{C} = ۹۰ \Rightarrow ۳\hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{C} = ۶۰$ $D\hat{C}B = ۶۰ - ۴۵ = ۱۵$	۳

۴	در یک کلاس $\frac{۳}{۴}$ دانش آموزان به فوتبال، $\frac{۳}{۸}$ آن‌ها به والیبال و $\frac{۱}{۴}$ آن‌ها به هر دورشته علاقه دارند و ۴ نفر به هیچ‌کدام از این دو رشته علاقه‌ای ندارند تعداد دانش‌آموزان این کلاس چند نفر است؟ **جواب:** $\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۳}{۸}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۸}$ فرض تعداد دانش‌آموزان x نفر باشد داریم: $\frac{۱}{۸}x+\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}x=\frac{۷}{۸}x$ کسری از دانش‌آموزان که به هیچ‌کدام علاقه ندارد. $x-\frac{۷}{۸}x=\frac{۱}{۸}x$ در نتیجه $\frac{۱}{۸}x=۴\rightarrow x=۳۲$ 	۳
۵	شعاع قاعده و ارتفاع دو تانکر استوانه‌ای شکل را مثال بزنید که وقتی تقریب عدد π را ۳ در نظر بگیرید، حجم هر کدام برابر ۹۰ متر مکعب باشد. اگر هزینه ساخت این تانکرها به ازای هر متر مربع مواد اولیه بکار رفته a تومان باشد، ساخت کدامیک از تانکرهایی که مثال زدید هزینه کمتری دارد؟ **جواب:** مثال ۲: ۲) $R=۲, h=\frac{۳۰}{۴}=۷/۵$ مثال۱: ۱) $R=۱\ ,\ h=۳۰$ مساحت قاعده $=\pi R^۲=۳\times ۱^۲=۳$ مساحت جانبی(۱ $=۲\pi Rh=۲\times ۳\times ۱\times ۳۰=۱۸۰$ مساحت کل $=۱۸۰+۶=۱۸۶$ مساحت قاعده $=\pi R^۲=۳\times ۴=۱۲$ مساحت جانبی(۲ $=۲\pi Rh=۲\times ۳\times ۲\times ۷/۵=۹۰$ مساحت کل $=۱۱۴$ هزینه اولی $۱۸۶a$ و هزینه دومی $۱۱۴a$ تومان پس هزینه دومی کمتر است.	۳
۶	اگر طول مستطیلی ده درصد افزایش و عرض آن ده درصد کاهش یابد، مساحت آن ۲ واحد مربع تغییر می‌کند. الف) مساحت مستطیل اولیه چقدر است؟ ب) در صورتی که طول مستطیل اولیه دو برابر عرض آن باشد. محیط مستطیل دومی چقدر است؟ **جواب: الف-**  مساحت مستطیل اولیه $\rightarrow xy$  مساحت مستطیل ثانویه $\rightarrow ۱/۱x\times ۰/۹y=۰/۹۹xy$ اختلاف مساحت‌ها $\rightarrow ۰/۰۱xy=۲$ مساحت اولیه $\rightarrow xy=\frac{۲}{۰/۰۱}=۲۰۰$ **ب-** $x=۲y\rightarrow xy=۲۰۰\rightarrow (۲y)(y)=۲۰۰\rightarrow y^۲=۱۰۰\rightarrow y=۱۰\ ,\ x=۲۰$ $(۱/۱x+۰/۹y)\times ۲=(۱/۱\times ۲۰+۰/۹\times ۱۰)\times ۲=(۲۲+۹)\times ۲=۶۲$	۳

۷	قسمتی از محور اعداد را انتخاب کرده‌ایم. در این قسمت ۵۱ عدد صحیح وجود دارد. مجموع سه عدد میانی این قسمت از محور اعداد برابر ۱۲− است. مجموع اعداد صحیح روی آن را بیابید. **جواب:** $(x-1)+x+(x+1)=3x=-12\rightarrow x=-4$ $-5\ ,\ -4\ ,\ -3$ عدد وسط ۲۵عدد ۲۵عدد $-4-25=-29\ ,\ -4+25=21$ $(-29)+(-28)+\ldots+21=(-29)+(-28)+(-27)+(-26)$ $+(-25)+(-24)+(-23)+(-22)=-204$	۳
۸	چند عدد طبیعی مانند n دارای این ویژگی است، که باقیمانده تقسیم عدد ۱۰۴۴ بر n برابر ۲۰ است؟آنها را بنویسید. **جواب:** $1044 = nk + 20$ و $n > 20$ $1044=nk+20\rightarrow nk=1024\rightarrow nk=2^{10}$ است 2^{10} شمارنده $n>20$ $2^5=32\ ,\ 2^6=64\ ,\ 2^7=128$ $2^8=256\ ,\ 2^9=512\ ,\ 2^{10}=1024$ یعنی n می‌تواند ۳۲ , ۶۴ , ۱۲۸ و ۲۵۶ , ۵۱۲ , ۱۰۲۴ باشد.	۳
۹	چندمین جمله دنباله $\ldots,\frac{3}{8},\frac{5}{13},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},1$ برابر $\frac{24}{71}$ است؟ **جواب:** $\ldots,\frac{6}{16},\frac{5}{13},\frac{4}{10},\frac{3}{7},\frac{2}{4},\frac{1}{1}$ با توجه به الگوی اعداد جمله عمومی به صورت $\frac{n}{3n-2}$ است. $\frac{n}{3n-2}=\frac{24}{71}\rightarrow 71n=72n-48\rightarrow n=48$ جمله ۴۸ام برابر $\frac{24}{71}$ است.	۳

۱۰ عددی را متقارن گوییم که از هر دو طرف یکی باشد مانند: ۳۸۵۸۳ و ۳۷۱۱۷۳.
چند عدد ۶ رقمی متقارن داریم که بر ۱۸ بخش‌پذیر است؟ ۵

جواب: حالت‌های روبه رو را در نظر می‌گیریم.

۱) ۲ a b b a ۲
۲) ۴ a b b a ۴
۳) ۶ a b b a ۶
۴) ۸ a b b a ۸

در حالت اول باید $۲a+۲b+۴$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد پس

$$۲a+۲b+۴=۹k \rightarrow ۲a+۲b=۹k-۴ \Rightarrow a+b=\frac{۹k-۴}{۲}$$

به ازای $k=۲$ داریم $a+b=۷$ در نتیجه (b,a) به ترتیب می‌توانند $(۷,۰),(۶,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۳,۴),(۲,۵),(۱,۶),(۰,۷)$ باشد. به ازای $k=۴$ داریم $a+b=۱۶$ در نتیجه (b,a) به ترتیب می‌توانند $(۹,۷),(۸,۸),(۷,۹)$ باشند.
به ازای $k=۶$ داریم $a+b=۲۵$ که غیرممکن است و به ازای $k>۶$ نیز حالتی به دست نمی‌آید.

در حالت دوم: $a+b=\frac{۹k-۸}{۲}$ ، با ازای $k=۲$, $a+b=۵$ ، (b,a) می‌تواند $(۵,۰),(۴,۱),(۳,۲),(۲,۳),(۱,۴),(۰,۵)$ باشد. به ازای $k=۴$ داریم $a+b=۱۴$ و (a,b) می‌توانند $(۵,۹),(۶,۸),(۷,۷),(۸,۶),(۹,۵)$ باشند به ازای سایر مقادیر k حالتی به دست نمی‌آید.

در حالت سوم: $a+b=\frac{۹k-۱۲}{۲}$ ، به ازای $k=۲$ داریم $a+b=۳$ و (b,a) می‌توانند $(۳,۰),(۲,۱),(۱,۲),(۰,۳)$ باشند. به ازای $k=۴$ داریم $a+b=۱۲$ و (b,a) می‌توانند $(۹,۳),(۸,۴),(۷,۵),(۶,۶),(۵,۷),(۴,۸),(۳,۹)$ باشند.

در حالت چهارم: $a+b=\frac{۹k-۱۶}{۲}$ ، به ازای $k=۲$ داریم $a+b=۱$ و (b,a) می‌توانند $(۱,۰),(۰,۱)$ باشند.
به ازای $k=۴$ داریم $a+b=۱۰$ و (b,a) می‌توانند $(۹,۱),(۸,۲),(۷,۳),(۶,۴),(۵,۵),(۴,۶),(۳,۷),(۲,۸),(۱,۹)$ باشند. لذا جمعاً ۴۳ حالت وجود دارد.

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید