دانش‌آموزان عزیز ضمن تبریک به شما برای شرکت در این مسابقه و با آرزوی موفقیت، لطفاً به نکات زیرتوجه کنید.

۱- **امتیاز تیم شما از جمع امتیاز ۶ سؤالی به دست می آید که از آن سؤالات امتیاز بیشتری گرفته باشید.**

۲- **هر تیم باید یک پاسخنامه را آماده کرده و تحویل دهد.**

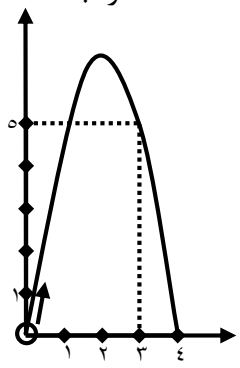
۳- **اعضای هر تیم باید پس از فکر کردن و مشورت با یکدیگر، راه حل کامل هر سؤال را با خط خوانا زیر آن سؤال بنویسد.**

۴- **استفاده از ماشین حساب ممنوع است.**

۵- **این آزمون شامل ۱۰ سؤال می باشد که در ۴ صفحه تنظیم شده است.**

خانه ریاضیات شهر : .....

مشخصات اعضای تیم: ۱-..... ۲- ..... ۳-.....

ردیف	سؤالات	امتیاز
۱	توپی را مطابق شکل از مبداء به هوا پرتاب کردیم.(مسیر توپ سهمی شکل است)این توپ موقع پایین آمدن از نقطه $(۳,۵)$عبورکرد و در $x=۴$ به زمین برخورد کرد، بالاترین ارتفاعی که توپ داشته است را به دست آورید؟ پاسخ :  $y=ax^۲+bx+c=f(x)$ $(۰,۰)=f \Rightarrow c=۰$ $\begin{cases}(۴,۰)\in f \Rightarrow ۱۶a+۴b=۰\\(۳,۵)\in f \Rightarrow ۹a+۳b=۵\end{cases}$ $\Rightarrow a=-\frac{۵}{۳}\ ,\ b=\frac{۲۰}{۳}$ $y=-\frac{۵}{۳}x^۲+\frac{۲۰}{۳}x$ $x=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=\frac{۲۰}{۳}$	۳
۲	باغچه‌ای مستطیلی به ابعاد ۱/۵ و ۳ متر مفروض است. می‌خواهیم اطراف این باغچه را حصارکشی کنیم به طوری که ناحیه حاصل، مستطیلی شود که فاصله نرده‌ها تا طول باغچه دو برابر فاصله آنها تا عرض باغچه باشد.چنانچه بخواهیم مساحت ناحیه حاصل ۸/۷۵ مترمربع باشد، فاصله نرده‌ها از هر طرف تا باغچه چقدر است؟ **پاسخ : فرض کنیم فاصله نرده ها تا عرض باغچه x باشد پس داریم** $(1/5+4x)(3+2x)=8/75\ \Rightarrow 8x^2+15x-4/25=0$ $\Rightarrow\ x=\frac{1}{4}, x=\frac{-17}{4}\ \Rightarrow x=\frac{1}{4}$	۳

۳	۳	دو عدد اول پیدا کنید که مربع اولی بعلاوه دومی برابر ۳۰۸ و مربع دومی بعلاوه اولی برابر ۳۷۸ باشد.

پاسخ:

$$a^۲+b=۳۰۸ \qquad b^۲+a=۳۷۸$$

$$b^۲-a^۲+a-b=۷۰ \Rightarrow (b-a)(b+a-۱)=۷۰$$

$$\begin{cases} b-a=۱ \\ b+a-۱=۷۰ \end{cases} \Rightarrow a=۳۵ \quad b=۳۶ \quad \times$$

$$\begin{cases} b-a=۲ \\ b+a-۱=۳۵ \end{cases} \Rightarrow a=۱۷ \quad b=۱۹ \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} b-a=۵ \\ b+a-۱=۱۴ \end{cases} \Rightarrow a=۵ \quad b=۱۰ \quad \times$$

$$\begin{cases} b-a=۷ \\ b+a-۱=۱۰ \end{cases} \Rightarrow a=۲ \quad b=۹ \quad \times$$

پس دو عدد مورد نظر ۱۷ و ۱۹ است.

۴	۳	پدری یک پسر و یک دختر دارد که سن آنها و سن پدر تشکیل دنباله هندسی می دهند اگر ۱۲ سال به سن دختر اضافه کنیم دنباله، حسابی میشود و در این وضع اگر ۹۶ سال به سن پدر اضافه کنیم دنباله مجدداً هندسی می شود اگر سن پسر کوچکتر از دختر باشد سن هریک را بدست آورید.

پاسخ : اگر سن پسر را x و سن دختر را y و سن پدر را z بگیریم، طبق مفروضات مساله داریم :

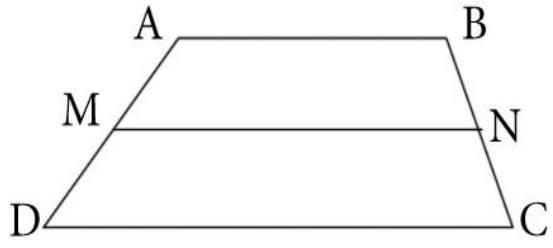
x, y, z دنباله هندسی در نتیجه $y^2 = xz$ و $x, y+12, z$ دنباله حسابی پس $2y + 24 = x + z$

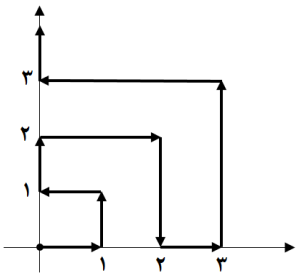
همچنین $x, y+12, z+96$ دنباله هندسی در نتیجه $(y+12)^2 = x(z+96)$ از این سه معادله داریم :

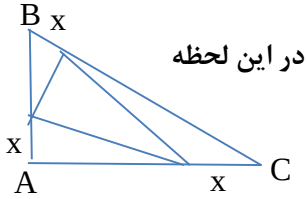
$$(y+12)^2 = xz + 96x \Rightarrow (y+12)^2 = y^2 + 96x \Rightarrow 12(2y+12) = 96x \Rightarrow$$
$$y + 6 = 4x$$

از طرف دیگر داریم $2y + 24 = x + z$ در نتیجه $8x - 12 + 24 = x + z$ بنا براین $z = 7x + 12$

با جایگذاری نتایج به دست آمده در رابطه $y^2 = xz$ به دست می آوریم $(4x-6)^2 = x(7x+12)$ و با حل این معادله به دست می آید $x = 6 \, , x = \frac{2}{3}$ که فقط جواب ۶ قابل قبول است لذا $x = 6 \, , y = 18 \, , z = 54$

۵	فاطمه برای ناهار یک دورهمی، از دو نوع سوسیس خانگی که طول یکی ۲۲ سانتیمتر و طول دیگری ۱۰ سانتیمتر بود استفاده کرد. دو سر هر سوسیس به صورت نیمکره به شعاع یک سانتیمتر است و ضخامت هر دو سوسیس هم یکسان است. فاطمه ابتدا هر یک از سوسیس ها را به قسمت هایی به طول یک سانتیمتر برش داد. او مشاهده کرد که نسبت تعداد قسمت های به شکل نیمکره به تعداد قسمت های به شکل استوانه $\frac{4}{29}$ است. اگر تعداد کل سوسیس هایی که فاطمه برش داده است ۴۸ تا باشد چند تا از سوسیس ها به طول ۱۰ سانتیمتر بوده است؟ **پاسخ : اگر تعداد سوسیس های به طول ۲۲ سانتیمتر را x و تعداد سوسیس های به طول ۱۰ سانتیمتر را y بگیریم تعداد قسمت های به شکل نیمکره می شود $2x+2y$ و تعداد قسمت های به شکل استوانه می شود $20x+8y$ در نتیجه داریم $x+y=48$ و $\frac{2x+2y}{20x+8y}=\frac{4}{29}$ از حل این دستگاه به دست می آید $x=26\,,y=22$**	۳
۶	در ذوزنقه روبرو MN موازی دو قاعده طوری رسم شده است که دو ذوزنقه با محیط برابر ایجاد کرده است. اگر AB=3 و BC=4 و AD=6 و DC=9 دو ساق به چه نسبتی قطع شده اند؟ پاسخ : فرض کنیم ساق ها به نسبت ۱ به k قطع شده باشند پس متوان فرض کرد $BN=x\,,NC=kx\,,AM=y\,,MD=ky$ حال چون محیط های دو ذوزنقه برابر است داریم $x+y+3=kx+ky+9$ در نتیجه $(x+y)(1-k)=6$ از طرف دیگر داریم $x(k+1)=4\,,y(k+1)=6$ در نتیجه $(x+y)(k+1)=10$ و حال از تقسیم دو رابطه به دست آمده داریم $\frac{k+1}{1-k}=\frac{5}{3}$ که نتیجه می دهد $k=\frac{1}{4}$ 	۳

۷	متحرکی از مبدأ مختصات شروع کرده و مسیر نشان داده شده در شکل را طی می کند. اگر او هر واحد را در یک ثانیه طی کند، بعد از ۲ ساعت به نقطه ای با کدام مختصات می رسد؟  **پاسخ : این متحرک پس از $(2 \times 1 =)$۲ ثانیه در نقطه $(1,1)$ و پس از $(3 \times 2 =)$ ۶ ثانیه در نقطه (2.2) و پس از $(4 \times 3 =)$ ۱۲ ثانیه در نقطه $(3,3)$ میباشد بنابراین در زمان $(85 \times 84 =)$ ۷۱۴۰ ثانیه در نقطه $(84,84)$ می باشد. ضمنا حرکت این متحرک بعد از رسیدن به این نقطه رو به پایین است پس در زمان ۷۲۰۰ ثانیه (بعد از ۲ ساعت) به نقطه $(84,24)$ می رسد**	۳
۸	اعداد صحیح ۱ تا ۳۳ را روی رئوس یک ۳۳ ضلعی نوشته ایم(نه کاملاً مرتب)، سپس مجموع اعداد روی هر دو سر ضلع را روی آن ضلع می نویسیم. آیا ممکن است اعداد روی اضلاع ۳۳ عدد متوالی شوند؟(نه کاملاً مرتب) **پاسخ : اگر اعداد به دست آمده برای ضلع ها را $x_1, x_2, \dots, x_{33}$ بگیریم و فرض کنیم این اعداد ۳۳ عدد متوالی $n, n+1, \dots, n+32$ هستند، چون در محاسبه اعداد روی ضلع ها هر کدام از اعداد ۱ تا ۳۳ که روی راس ها قرار دارند دو بار حساب شده است پس باید داشته باشیم :** $$x_1 + x_2 + \cdots + x_{33} = n + (n+1) + \cdots + (n+32) = 2 \times \frac{33 \times 34}{2} = 33 \times 34$$ **بنابراین داریم $\frac{33 \times (2n+33)}{2} = 33 \times 34$ در نتیجه $33 \times (2n+32) = 33 \times 68$ پس $n=18$ پس اگر این کار ممکن باشد، باید اعداد روی ضلع ها ۱۸ تا ۵۰ باشند. در واقع این کار ممکن است برای ارائه یک نمونه از یک راس شروع کنید و یک در میان اعداد را به ترتیب روی رئوس قرار دهید (راس اول را ۱ و راس سوم را ۲ و ... و راس سی سه ام را ۱۷ و بعد را دوم را ۱۸ و راس چهارم را ۱۹ قرار دهید و به همین ترتیب تا آخر**	۳

۹	سه مورچه روی رئوس مثلث ABC هستندو طول اضلاع CA,BC,AB به ترتیب برابر است با 4,5,3. اگر سه مورچه با سرعت یک واحد در ثانیه و در جهت $A \to B \to C \to A$ حرکت کنند،در چه لحظه ای از ۳ثانیه ی اول، مساحت مثلثی که سه راس آن توسط مورچه ها مشخص می شود،مینیمم است؟  **پاسخ : فرض کنیم سه مورچه هر کدام x ثانیه حرکت کرده باشند. مساحت مثلثی که در این لحظه مورچه ها سه راس آن هستند را به این شکل به دست می آوریم که مساحت های سه مثلثی که درسه گوشه به وجود می آیند را از مساحت مثلث کم می کنیم.** $s = 6 - \frac{1}{2}x(3-x)\sin B - \frac{1}{2}x(5-x)\sin C - \frac{1}{2}x(4-x) \Rightarrow$ $s = 6 - \frac{1}{2}x(3-x)\frac{4}{5} - \frac{1}{2}x(5-x)\frac{3}{5} - \frac{1}{2}x(4-x)$ **پس از ساده کردن این رابطه داریم $s = \frac{6}{5}x^2 - \frac{47}{10}x + 6$ که یک تابع درجه دوم است و مینیمم آن در $x = \frac{-b}{2a} = \frac{47}{24}$ به دست می آید.**	۴
۱۰	علی ۲۵ کارت در دست دارد، که روی هر کدام یکی از اعداد۱ تا ۲۵ نوشته‌شده‌است. او ۱۶ تا از کارت‌ها را در سبد A و ۸تای دیگر را در سبد B قرار می‌دهد و یک کارت را پیش خود نگه می‌دارد. اگر مجموع اعداد روی کارت‌های سبد B، ۳۳ واحد بیشتر از مجموع اعداد روی کارت‌های سبد A باشد. احتمال آنکه عدد روی کارتی که پیش علی است، مربع کامل باشدچقدراست؟ **پاسخ:** $a =$ **مجموع اعداد روی کارت‌های سبد** A $b =$ **مجموع اعداد روی کارت‌های سبد** B $x =$ **عدد روی کارتی که پیش علی است** $a + ۳۳ = b$ $۱+۲+۰۰۰+۱۶ \le a \Rightarrow ۱۳۶ \le a \quad (۱)$ $۱۸+۱۹+۰۰۰+۲۵ \ge b \Rightarrow ۱۷۲ \ge a+۳۳ \Rightarrow ۱۳۹ \ge a \quad (۲)$ (۱) و (۲) $\Rightarrow ۱۳۶ \le a \le ۱۳۹$ $a+b+x = ۱+۰۰۰+۲۵ \Rightarrow a+a+۳۳+x = ۳۲۵ \Rightarrow ۲a+x = ۲۹۲$ $a = ۱۳۷ \Rightarrow x = ۱۸ \quad a = ۱۳۶ \Rightarrow x = ۲۰$ $a = ۱۳۹ \Rightarrow x = ۱۴ \quad a = ۱۳۸ \Rightarrow x = ۱۶$ $p = \frac{۱}{۴}$	۴

دانش آموزان عزیز، خسته نباشید، لطفا دقت کنید که پاسخ هر سؤال را به طور کامل نوشته باشید. شاد و پیروز باشید